

Titre: Extension des modèles de construction de quarts de travail au cas
de fenêtres de pause multiples

Auteur: Ahmed Baba-Hadji
Author:

Date: 2004

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Baba-Hadji, A. (2004). Extension des modèles de construction de quarts de travail
au cas de fenêtres de pause multiples [Master's thesis, École Polytechnique de
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7445/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7445/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

EXTENSION DES MODÈLES DE CONSTRUCTION DE QUARTS DE
TRAVAIL AU CAS DE FENÊTRES DE PAUSE MULTIPLES

AHMED BABA-HADJI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

JUIN 2004

©Ahmed Baba-Hadji, 2004.



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-612-97921-0

Our file Notre référence

ISBN: 0-612-97921-0

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

EXTENSION DES MODÈLES DE CONSTRUCTION DE QUARTS DE
TRAVAIL AU CAS DE FENÊTRES DE PAUSE MULTIPLES

présenté par : BABA-HADJI Ahmed

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. TURGEON André, Ph.D., président

M. SOUMIS François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. TACHEFINE Beyime, Ph.D., membre

À Mounir ...

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord mon directeur, M. François Soumis, pour son appui financier tout au long de mon projet de recherche. Je le remercie aussi pour son support, ses encouragements, et pour m'avoir fait bénéficier de son expérience dans ce domaine de recherche.

Je remercie mon codirecteur, Guy Desaulniers, pour ses conseils, ses commentaires constructifs et sa disponibilité.

Durant la réalisation de la partie informatique de mon projet, j'ai eu l'opportunité de travailler avec Eric Vatri. Je lui adresse un merci pour avoir eu la patience d'écouter et de répondre à toutes mes questions.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury.

Je tiens également à remercier les personnes qui travaillent au GERAD.

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré au problème de construction des horaires de travail qui consiste à déterminer un ensemble de quarts afin de satisfaire à coût minimum une certaine demande en employés. Chaque quart est caractérisé par une heure de début et de fin ainsi que les heures de début et de fin de toutes les pauses. Dans ce mémoire, on s'intéresse au cas où les pauses dans un quart sont multiples. Les quarts permis sont décrits par des types de quart permis. Un type de quart est caractérisé par une heure de début, une heure de fin et par des fenêtres dans lesquelles doivent se trouver les débuts de chacune des pauses. De plus, les espacements entre deux pauses consécutives d'un même quart doivent respecter une certaine durée minimale et maximale de travail. Le premier objectif est de comparer trois modèles, soit les modèles de Dantzig (1954), de Bechtold et Jacobs (1990) et d'Aykin (1996) sous ces hypothèses de flexibilité. Au début, nous présentons les trois approches pour résoudre le problème de base, i.e., dans le cas où il y a une seule fenêtre de pause par quart et toutes les pauses ont la même durée. Ensuite, nous étendons ces approches dans le cas avec pauses décomposables, i.e., lorsqu'il y a plusieurs fenêtres de pause et des pauses de durées différentes. De plus, nous proposons une formulation réduite du modèle de Bechtold et Jacobs (1990). La résolution de tous ces modèles se fait en utilisant le logiciel commercial Cplex. Des résultats comparatifs obtenus sur des jeux de données réels fournis par la compagnie Technologies Ad Opt Inc sont présentés et discutés.

Le deuxième objectif de ce mémoire est la construction des horaires de travail sur un horizon d'une semaine. Pour cela, nous appliquons une méthode de décomposition temporelle aux modèles de Bechtold et Jacobs réduit, ainsi qu'au modèle d'Aykin (1996). Nous présentons les résultats obtenus pour différents scénarios. Les tests

ont permis d'évaluer le comportement de l'approche en fonction de la longueur des tranches de temps utilisées (une, deux et trois journées). Cette approche permet de construire des quarts de travail pour des problèmes qui ne peuvent être résolus directement (i.e. sans décomposition de l'horizon).

ABSTRACT

This master's thesis is devoted to the problem of constructing of work schedules that consists of determining a set of shifts with minimum cost in order to satisfy a certain demand for employees. Each shift is characterized by a start and an end time as well as the start and end time of all the breaks. In this thesis we are interested in the case where the breaks in a shift are multiple (flexibility hypothesis). The allowed shifts are described by allowed shifts type. A shift type is characterized by a start time, an end time and by windows that contain the start time of each breaks. Moreover, the spacing between two consecutive breaks in a given shift must respect a certain minimal and maximal duration of work. The first objective is to compare three models: the models of Dantzig (1954), Bechtold and Jacobs (1990) and Aykin (1996) under the flexibility assumption. At the beginning, we present the three approaches to solve the basic problem, i.e., when there is only one break window per shift and all the breaks have the same duration. Then, we extend these approaches to the case with decomposable breaks, i.e., when there is several break windows and the duration of breaks are different. Moreover, we propose a reduced formulation of the model of Bechtold and Jacobs (1990). These models were solved with the commercial software Cplex using real data sets provided by the company Technologies AD Opt Inc. Comparative results are presented and discussed.

The second objective of this thesis is to construct work schedules over a weekly horizon. We applied the temporal decomposition approach to the reduced Bechtold and Jacobs model, then to the Aykin (1996) model. We present our results for various scenarios. The tests allow for a better evaluation of the approach behavior depending on the length of the time slices used (one, two or three days). This approach enables to build shifts of work for problems that cannot be solved directly (i.e. without decomposing the horizon).

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xv
LISTE DES ALGORITHMES	xvi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : LE PROBLÈME DE CONSTRUCTION DES QUARTS ET SES VARIANTES	5
1.1 : Le problème de construction des quarts sur une journée	6

1.2 : Le problème de construction des quarts et des cycles sur une semaine	7
1.2.1 : Construction des cycles sur une semaine	8
1.2.2 : Construction séquentielle des cycles et des quarts sur une semaine	9
1.2.3 : Le problème de construction des cycles et des quarts simultanément sur une semaine	10
CHAPITRE 2 : REVUE DE LITTÉRATURE	12
2.1 : Approches par recouvrement	12
2.2 : Approche par modélisation implicite	14
2.2.1 : Modèle de Bechtold et Jacobs (1990)	17
2.2.2 : Modèle d'Aykin	18
2.2.3 : Equivalence entre les modèles	20
2.2.4 : Modèles de cycles et quarts	21
2.3 : Contributions	22
CHAPITRE 3 : EXTENSION DES TROIS MODÈLES	24
3.1 : Génération des variables	26
3.1.1 : Les variables de type de quart	26

3.1.2 : Les variables de pause	28
3.1.3 : Les variables de quart	29
3.2 : Modèle de Dantzig	31
3.3 : Extension du modèle de Bechtold et Jacobs	32
3.3.1 : Modèle de Bechtold et Jacobs de densité réduite	38
3.4 : Extension du modèle d'Aykin (1996)	40
3.4.1 : Revue de littérature	40
3.4.2 : Modèle d'Aykin étendu	41
3.5 : Affectation des pauses aux quarts	43
3.6 : Equivalence entre le modèle de Dantzig et le modèle de transport .	44
CHAPITRE 4 : EXPÉRIMENTATION	49
4.1 : Description des scénarios de données	49
4.2 : Plan des tests	50
4.3 : Résultats	51
4.3.1 : Résultats pour des horizons d'une journée	51
4.3.2 : Résultats pour des horizons de deux journées	55

CHAPITRE 5 : MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TEMPORELLE	57
5.1 : Décomposition temporelle	57
5.2 : Méthode de résolution dans une tranche de temps	59
5.3 : Modification de la demande dans une journée	61
5.4 : Expérimentation	62
CONCLUSION	70
BIBLIOGRAPHIE	72

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Exemple de cycles	8
Tableau 4.1 : Nombre de variables et de contraintes des trois modèles . .	52
Tableau 4.2 : Nombre de non-zéros et densité des matrices pour les trois modèles	52
Tableau 4.3 : Résultats pour un horizon d'une journée	53
Tableau 4.4 : Résultats pour un horizon d'une journée (suite du tableau 4.3)	54
Tableau 4.5 : Résultats pour un horizon de deux journées	55
Tableau 5.1 : Résultats du modèle de Bechtold et Jacobs réduit par décom- position temporelle pour le scénario 1	64
Tableau 5.2 : Résultats du modèle de Bechtold et Jacobs réduit par décom- position temporelle pour le scénario 2	65
Tableau 5.3 : Résultats du modèle de Bechtold et Jacobs réduit par décom- position temporelle pour le scénario 3	66
Tableau 5.4 : Résultats du modèle d'Aykin par décomposition temporelle pour le scénario 1	67
Tableau 5.5 : Résultats du modèle d'Aykin par décomposition temporelle pour le scénario 2	68

Tableau 5.6 : Résultats du modèle d'Aykin par décomposition temporelle pour le scénario 3	68
Tableau 5.7 : Résultats des moyennes des temps CPU pour les deux modèles	69

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 : Réseau sous-jacent au modèle de type transport	15
Figure 2.2 : Réseau sous-jacent au modèle de Betchtold et Jacobs	19
Figure 3.1 : Génération de quarts	31
Figure 3.2 : Contraintes d'espacement	38

LISTE DES ALGORITHMES

3.1 : Générer les quarts (LP)	30
3.2 : GénérerListe (LPQ)	30

INTRODUCTION

Une variété d'entreprises de services comme les compagnies de téléphone et d'aviation, les hôpitaux, les départements de police, les grands magasins de vente et les banques ont recours à la planification des horaires de travail. Le développement économique et social a incité ces entreprises à planifier les horaires de leurs employés pour réduire les coûts attribués au personnel et améliorer leurs conditions de travail. En effet, proposer des quarts de travail avec moins de choix dans les heures de début et les durées de ces quarts peut créer une sous-couverture de la demande dans certaines périodes. Cela va influencer la qualité du travail. Aussi, dans d'autres périodes, cela peut créer une sur-couverture et ainsi augmenter les coûts d'opération. Par contre, offrir beaucoup de choix pour les heures de début des quarts et leurs durées rend le problème d'affectation des employés aux quarts compliqué. Mais, cela réduit les coûts et apporte la satisfaction des employés. Ce type de problème est combinatoire et requiert l'utilisation d'outils d'optimisation pour le résoudre.

Les problèmes de construction des quarts de travail, qu'on note par la suite PCQT, peuvent être regroupés en deux catégories, selon l'horizon de planification. On retrouve la construction des quarts de travail sur une journée (daily shift scheduling) ou sur une semaine ou plus qu'on appelle construction des cycles et des quarts de travail (tour scheduling). Cette dernière catégorie n'est qu'une extension de la première catégorie, en ajoutant des contraintes pour attribuer des jours de repos aux employés. Pour cette raison, nous nous intéressons dans ce mémoire surtout au problème des quarts de travail sur une journée pour ensuite l'étendre sur une semaine sans construction de cycles.

Les modèles développés dans la littérature pour le PCQT nous montrent deux familles de modèles : les modèles explicites connus sous le nom de modèles de recouvrement,

et ceux qui sont implicites. Ces modèles se différencient dans la qualité de la solution obtenue, le temps d'exécution et la capacité de stockage en mémoire. En effet, les modèles explicites sont souvent de grande taille ; leurs résolutions nécessitent donc des approximations qui influencent la qualité de la solution. Par contre, en les résolvant avec des méthodes exactes, les temps de résolution sont très grands. Cela est dû à la grande flexibilité dans les types de quart proposés par les entreprises.

Dans la première famille de modèles, il y a le modèle développé par Dantzig (1954) qui est le premier modèle proposé pour ce type de problème. Plus tard, plusieurs techniques d'optimisation ont été développées pour améliorer la solution obtenue et réduire le temps de résolution du problème. Comme exemple, citons l'heuristique de génération de colonnes proposée par Panton (1999). Le modèle reste toutefois impraticable lorsqu'on a une grande flexibilité dans la définition des types de quart. Pour permettre cette flexibilité sous un modèle plus compact, il y a eu l'apparition des modèles implicites, dont le premier est attribué à Betchtold et Jacobs (1990) où les types de quart sont explicites et l'affectation des pauses dans les quarts est implicite. Ce modèle utilise les contraintes de couverture de Dantzig, avec de nouvelles variables et un ensemble de contraintes de contrôle. Il a été utilisé dans le cas d'une seule pause par quart et dans le cas d'une journée de moins de 24 heures. Un autre modèle implicite, proposé par Aykin (1996), réduit aussi le nombre de variables par rapport au modèle de Dantzig, mais il est moins compact que celui de Betchtold et Jacobs. Par contre, il a l'avantage d'avoir une matrice de coefficients moins dense. Ce modèle a été utilisé dans le cas d'une pause fixe au milieu du quart et une pause variable répartie sur deux fenêtres de pause permises. Ces deux derniers modèles ont été largement utilisés pour le problème de construction des cycles.

Pour voir l'économie en nombre de variables considérées par l'approche implicite par rapport au modèle de recouvrement, supposons qu'un type de quart se définit par une heure de début, une durée et une fenêtre de pause. L'approche de recouvrement

énumère tous les quarts avec une seule pause et les utilise dans le modèle. Par contre, l'approche implicite utilise seulement les types de quart tels qu'ils sont définis. Par exemple, considérons deux types de quart avec une fenêtre de pause d'une longueur d'une heure chacun, des périodes de 15 minutes et une pause à placer de 30 minutes. À l'aide de l'approche de recouvrement, dix quarts différents sont énumérés tandis que, dans l'approche implicite, on énumère les deux types de quart seulement, donc cinq fois moins.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème dans le cas général où il y a une grande flexibilité dans les types de quart et dans les pauses, et des journées de plus de 24 heures de travail sont permises. On considère aussi le cas d'un seul type d'activité (i.e., tous les employés au travail effectuent le même type de travail) et d'une demande cyclique d'un jour à l'autre ou d'une semaine à l'autre. La flexibilité est obtenue en considérant certains facteurs, comme par exemple, la présence de pauses décomposables.

Dans ce contexte de flexibilité accrue, nous appliquons les trois modèles cités ci-haut. La formulation mathématique du modèle de Dantzig dans le cas général existe déjà dans la littérature. Nous généralisons les deux modèles implicites seulement, en ajoutant les contraintes nécessaires pour respecter les facteurs considérées pour la flexibilité accrue. Pour obtenir une solution entière et diminuer les temps de résolution, on applique une technique de séparation et évaluation progressive (Branch-and-Bound) avec priorité de branchement sur les variables de quart, car les variables de pause sont liées à ces dernières. Cette procédure a été proposée par Aykin (1998). Nous faisons ensuite une étude comparative en ce qui concerne le nombre de variables, le nombre de contraintes, la densité de la matrice, la sur-couverture et le temps de résolution.

Par la suite, nous proposons un modèle d'affectation des pauses aux quarts pour le modèle de Bechtold et Jacobs. Ce dernier nous donne seulement, dans la solution

optimale, le nombre d'employés affectés à chaque quart et les pauses par période de temps, mais pas par quart. Cette difficulté n'existe pas dans le modèle d'Aykin.

Pour le deuxième objectif de ce mémoire, nous nous intéressons au problème de construction des quarts de travail pour une semaine. Ici, on n'est pas dans un problème de construction de cycles, car les jours de repos, sont déjà affectés à chaque employé. Cela permet à l'entreprise de préparer une planification d'horaires pour une saison. La formulation de cette situation avec les modèles implicites, entraîne une augmentation du nombre de contraintes et du nombre de variables et on s'attend à ce que les temps d'exécution soient très grands, voire même impraticables pour de grands problèmes. Alors, nous proposons une heuristique de décomposition temporelle pour la résolution du problème. On fait aussi une comparaison avec la résolution directe et une comparaison entre les modèles de Betchold et Jacobs et celui d'Aykin dans cette situation. La solution obtenue pour une semaine sera identique pour les autres semaines de la saison. Toutefois, il arrive souvent des imprévus qui peuvent changer la demande pour une certaine semaine. Afin de pallier à cette difficulté, nous ajoutons une technique de ré-optimisation du modèle dans une fenêtre précise (là où il y a eu modification de la demande), en utilisant comme conditions initiales, la solution déjà obtenue pour une semaine.

Voici un bref aperçu du contenu de ce mémoire. Le premier chapitre décrit les deux types de PCQT et le chapitre suivant présente une revue de littérature sur ce problème. Le troisième chapitre donne une formulation mathématique des extensions des modèles de Betchold et Jacobs et de celui d'Aykin, lorsqu'on est en présence d'une grande flexibilité. Le quatrième chapitre présente les résultats numériques obtenus avec différents scénarios de tests appliqués aux différents modèles proposés. Le dernier chapitre décrit la méthode de décomposition temporelle proposée pour la résolution du PCQT sur un horizon d'une semaine, et les résultats numériques de l'application de cette méthode avec les mêmes scénarios utilisés dans le chapitre précédant.

CHAPITRE 1 : LE PROBLÈME DE CONSTRUCTION DES QUARTS ET SES VARIANTES

Dans ce chapitre, nous décrivons le problème de construction des quarts. On distingue deux variantes : la variante où l'horizon de planification est court (une journée) et la variante où l'horizon de planification est long (une semaine ou plus). Au début, nous précisons quelques définitions utilisées dans la construction des quarts de travail. Nous discutons aussi du problème de construction des quarts et des cycles simultanément. La description du problème qu'on propose concerne un problème de base, où les quarts ne peuvent admettre qu'une seule pause exactement et les pauses sont de durée égale.

Période : Le plus petit intervalle de temps pour lequel la demande est définie. Dans des cas réels, la période peut prendre des valeurs comme 15, 20, 30 ou 60 minutes.

Demande : Le nombre d'employés nécessaire pour effectuer la charge de travail durant une période.

Courbe de demande : L'histogramme des demandes constituant une courbe qui peut être continue 24 heures sur 24, 7 jours sur 7 ou discontinue si la journée de travail est moins de 24 heures.

Pause : Une succession de périodes consécutives durant lesquelles le quart associé ne couvre pas la demande.

Fenêtre de pause : Un ensemble de périodes successives dans lesquelles la pause peut commencer.

Quart : Un horaire de travail qui spécifie l'ensemble des périodes de travail et de pause d'une journée. Il est caractérisé par une heure de début, une durée, une heure de début pour la pause ainsi que sa durée.

Type de quart : Un horaire de travail qui spécifie l'ensemble des périodes de travail sans indication des pauses. Il est caractérisé par une heure de début, une durée et une fenêtre de pause. Il génère un ensemble de quarts lorsqu'on introduit les pauses.

1.1 Le problème de construction des quarts sur une journée

Chaque entreprise, suivant le type de tâches ou de service qu'elle effectue, estime, à l'aide d'une étude statistique, le nombre d'employés nécessaire pour chacune des périodes déterminées. Elle construit ainsi des courbes de demande pour une journée ou plusieurs jours. Elle choisit aussi un ensemble de types de quart avec fenêtres de pause, en proposant des débuts de quart à différents moments, suivant les variations de la demande. Les durées des types de quart peuvent être différentes. Le placement des fenêtres de pause se fait suivant l'activité travaillée qui nécessite une pause après une durée minimale ou maximale de travail. Pour chaque type de quart proposé, on peut évaluer son coût : par exemple, un type de quart de jour est moins coûteux qu'un de nuit. On considère le cas continu où on a des types de quart chevauchant entre deux jours. Dans ce cas, on peut considérer la partie du type de quart après minuit comme une partie qui débute le matin du même jour. Le cas discontinu étant plus facile n'est pas étudié. Le problème de construction des quarts sur une journée consiste à construire des quarts de travail valides d'un coût total minimal de façon à satisfaire la demande pour chaque période d'une journée donnée.

Par exemple, considérons un centre d'appels téléphoniques dont les journées de travail s'étendent de 8 :00 jusqu'à 22 :00. Ce service peut être offert par des opérateurs de téléphone où le nombre requis, durant des intervalles de temps, est basé sur des données historiques d'appels reçus. Notons que, si les variations dans la demande

pendant la journée ne sont pas grandes dans des intervalles de 60 minutes, les types de quart de travail auront un début à chaque heure. Pour la durée des types de quart, on peut proposer, pour les opérateurs qui travaillent à temps plein des quarts de 8 heures et, pour ceux qui travaillent à temps partiel, des quarts de 4 heures. On propose un coût (le salaire) pour les quarts à temps plein différent de celui à temps partiel. Pour les fenêtres de pause, on peut proposer une pause d'une durée de 15 minutes qui commence à partir de 2 ou 3 heures après le début du quart. A partir de ces données, le problème revient à sélectionner les quarts qui couvrent la demande avec un coût minimal.

1.2 Le problème de construction des quarts et des cycles sur une semaine

Dans le problème de construction des quarts et des cycles pour une semaine, on doit tenir compte de la présence des journées de repos. On remarque qu'il y a trois façons d'approcher le problème :

- (i) construire les cycles directement sans se soucier des quarts ;
- (ii) construire d'abord les cycles suivant les choix des employés pour ensuite construire les quarts ou inversement ;
- (iii) construire les cycles et les quarts simultanément.

Dans ce mémoire, nous traiterons le deuxième cas de construction, nous construirons de façon optimale seulement les quarts nécessaires pour une durée d'une semaine, car les cycles des employés sont déjà établis. L'ensemble des employés est défini tel que chacun a un nombre de jours de travail et de repos prédéterminés, i.e., le cycle de travail de chaque employé est déjà préparé. Dans ce qui va suivre, nous allons décrire chacune des trois approches citées ci-dessus.

1.2.1 Construction des cycles sur une semaine

La construction des cycles de travail directement se présente, lorsqu'on est en présence d'une situation où les quarts sont prédéfinis, comme dans le cas où les quarts ont la même durée et le même début chaque jour de la semaine. Aussi, on peut avoir une situation où pour chaque jour on a des quarts dans différentes plages d'horaire, par exemple des quarts le matin, le soir et la nuit. Les quarts de chaque plage d'horaire ont les mêmes durées et les mêmes débuts pour chaque jour. Alors dans ces situations, le problème de construction des cycles ne nécessite pas la construction des quarts. Il suffit de répartir la demande dans ces quarts de tel façon que chaque employés prend des jours de repos pendant la semaine. Le nombre et les caractéristiques (weekend, jour de semaine ou une combinaison des deux) de ces jours de repos varient suivant l'organisation du travail et le type d'industrie de chaque entreprise.

Par exemple, si dans une entreprise les quarts de travail sont les mêmes (début 8 :00 et la fin 17 :00) chaque jour, le problème de construction de cycles revient à affecter les jours de repos et les jours de travail aux employés, en respectant la demande de chaque jour de la semaine. Le tableau suivant donne un exemple.

Tableau 1.1 – Exemple de cycles

jour	Lun	Mar	Mer	Jeu	Ven	Sam	Dim
Demande	2	3	5	5	4	3	3
cycle 1	2	2	2	2	2	0	0
cycle 2	0	0	2	2	2	2	2
cycle 3	0	1	1	1	0	1	1

Dans cet exemple, on a construit trois cycles avec deux jours de repos chacun : le premier pour deux employés, le deuxième pour deux employés aussi et le troisième pour un seul employé. On remarque que, dans cet exemple, on n'a pas eu de sur-

couverture (resp. sous-couverture), mais on aurait pu en avoir si, par exemple, la demande le samedi avait été d'un employé seulement (resp. quatre employés)

Pour ce problème, on propose la définition suivante : La construction des cycles de travail consiste à déterminer un ensemble de cycles dont chacun représente un ensemble de jours de travail et de repos pouvant être consécutifs pendant une semaine, un mois ou plus.

1.2.2 Construction séquentielle des cycles et des quarts sur une semaine

Dans certaines entreprises de service, la demande varie au cours d'une journée de travail et de jour en jour sur la semaine. Cette situation nécessite que les quarts d'une même journée doivent avoir des débuts différents et des longueurs différentes. L'objectif de l'entreprise est d'obtenir une construction des cycles de travail pour ces employés.

Dans ce cas, le problème de construction des cycles nécessite la construction des quarts de travail en premier lieu. La construction des quarts de travail sur une semaine consiste à déterminer un ensemble de quarts pour plusieurs jours consécutifs, afin de satisfaire une courbe de demande spécifiée. Si la demande ne varie pas entre les jours de la semaine, le problème devient facile. Il suffit de construire les quarts pour une journée seulement, et de les dupliquer aux autres journées de la semaine. Une fois que la construction des quarts est faite, on procède à la construction des cycles comme définie dans la section précédente. Dans ce cas, les cycles sont construits à partir des quarts et non de la demande.

Il arrive que, pour des entreprises, les cycles des employés sont déjà définis, car chaque employé propose à l'avance son emploi du temps de la semaine. Donc il reste

à construire les quarts de travail de la semaine, suivant la demande et ensuite affecter à chaque employé les quarts qui correspondent à son cycle de travail.

1.2.3 Le problème de construction des cycles et des quarts simultanément sur une semaine

Avant de définir le problème, considérons à nouveau l'exemple sur les centres d'appels téléphoniques cité ci-dessus. En général, dans les centres d'appels téléphoniques, les employés sont affectés à des cycles sur une semaine pour répondre aux appels reçus. La demande estimée qui doit être traitée par les agents ne fluctue pas seulement d'une semaine à l'autre, mais aussi d'un jour à l'autre. En effet, on peut trouver des pointes de demande durant les journées où la demande croît significativement et les périodes de pointe peuvent être différentes d'un jour à l'autre. Le changement au cours des semaines n'est, en général, pas vraiment significatif pour une saison. Par conséquent, on peut produire des cycles pour une semaine et les utiliser d'une semaine à l'autre.

Pour construire les cycles de travail pour leurs employés, les entreprises utilisent deux étapes comme celles définies à la section 1.2.2. La première étape consiste à générer des quarts pour chaque jour de la semaine pour couvrir la demande estimée durant la semaine. Ensuite, dans la deuxième étape, ils utilisent des méthodes simples pour construire des cycles en combinant les quarts de chaque jour obtenus dans la première étape. Il arrive que quelques cycles produits à l'aide de la construction séquentielle ne rencontrent pas complètement les règles du travail d'une semaine imposées par l'entreprise. Par exemple, le nombre ou le positionnement des jours de repos, la fenêtre de temps entre les quarts des jours consécutifs pour un cycle, etc.... Donc, on est obligé de changer le nombre d'employés de certains quarts ou ajouter des employés additionnels.

Etant donné cette difficulté, il est préférable de construire les quarts de travail et les cycles simultanément dans un seul modèle, en tenant compte des règles imposées

par l'entreprise pour chaque jour et pour la semaine. Le problème de construction de cycles et de quarts consiste à construire simultanément des quarts de travail pour chaque jour et des cycles pour spécifier les jours de travail et les jours de repos sur un horizon d'une semaine. On peut donc voir les problèmes de construction de quarts et de construction de cycles comme deux sous-problèmes du problème simultané.

CHAPITRE 2 : REVUE DE LITTÉRATURE

Dans ce chapitre, nous donnons une synthèse des principaux travaux publiés dans la littérature sur la construction des quarts pour un horizon d'une journée. Ces travaux sont classés selon la modélisation proposée. On se restreint au problème de base, i.e., en présence d'une seule pause par quart et les pauses sont de même durée (une durée peut correspondre à plusieurs périodes). On distingue deux types d'approches : les approches par recouvrement (section 2.1) et les approches implicites (section 2.2).

2.1 Approches par recouvrement

Le modèle de recouvrement a été souvent utilisé pour formuler les problèmes de construction de quarts. Dans cette formulation, on génère pour chaque type de quart, tous les quarts possibles qui se définissent par une heure de début, une durée, une heure de début pour la pause et la durée de la pause. Pour sélectionner les quarts, chaque quart est représentée par une variable de décision. Ces variables sont introduites dans le modèle pour satisfaire une certaine demande à chaque période tout en minimisant les coûts associés aux quarts. Lorsqu'on suppose que ces coûts sont constants, l'objectif est de minimiser le nombre total d'employés.

La première formulation d'un modèle de construction des quarts de travail par cette approche est attribuée à Dantzig (1954). Depuis, de nombreuses études sur ce modèle ont été faites afin de développer des heuristiques pour la résolution du problème. Cela est dû au fait que, lorsqu'il y a une grande flexibilité dans la définition des types de quart (par exemple, lorsque les fenêtres de pause sont très larges), le nombre de quarts à générer augmente et peut rendre le problème difficile à résoudre. La méthode de

résolution suggérée par Dantzig consiste à résoudre la relaxation linéaire pour ensuite utiliser une heuristique d'arrondi à l'entier le plus proche qui assure le respect des contraintes de couverture. La solution obtenue est acceptée si la différence entre la valeur de la solution de la relaxation linéaire et celle de la solution entière est petite.

Bechtold et Jacobs (1991) présentent une revue sur les méthodes heuristiques proposées dans la littérature, ainsi qu'une comparaison entre les différentes heuristiques proposées pour la résolution des problèmes de recouvrement. L'auteur a classé ces méthodes en deux catégories. Les heuristiques basées sur les modèles LP et les méthodes heuristiques de construction. Dans la première catégorie, on applique la relaxation linéaire sur l'ensemble des quarts ou des cycles, après on arrondit les variables obtenues vers le plus grand entier qui suit ou à l'entier le plus proche. Puis, on augmente de différentes manières le nombre d'employés pour minimiser la sous-couverture. On retrouve dans la deuxième catégorie des méthodes itératives qui, à chaque itération, ajoutent des quarts au modèle, selon un certain critère, par exemple, éviter la sous-couverture ou diminuer la sur-couverture.

Panton et Ryan (1999) présentent deux méthodes : l'une basée sur l'apposition de colonnes, et l'autre sur la génération de colonnes. Dans la première méthode, le problème est résolu initialement sans tenir compte des pauses. Il y a donc moins de variables de quart dans le modèle. La solution optimale obtenue est une sélection de certaines colonnes (des quarts sans pause) qui couvrent la demande dans chaque période avec coût minimal. Ensuite, les pauses sont introduites pour obtenir de nouvelles colonnes (des quarts avec pause). Pour la méthode de génération de colonnes, on résout le problème initialement à l'aide d'un sous-ensemble de variables de quart avec pause. Ensuite on résout des sous-problèmes pour identifier d'autres colonnes (variables) non générées qui ont un coût réduit négatif. Ces variables sont ajoutées au sous-ensemble des variables considérées et on recommence une nouvelle itération. Le processus s'arrête lorsqu'il n'y a plus de colonnes à coût réduit négatif. Les deux

méthodes sont meilleures que le modèle de recouvrement car ils n'utilisent pas dans leur résolution tous les quarts énumérés. Les auteurs comparent les deux méthodes par rapport aux temps d'exécution sur un ensemble de données. Par exemple, pour un nombre de 32956 quarts considérés dans le modèle de recouvrement, le temps d'exécution était de 324 secondes pour la méthode de génération de colonnes, alors que la méthode basée sur l'apposition de colonnes n'a pas donné de solution après un temps de 5000 secondes. Pour le reste des tests, le temps de résolution par la méthode de génération de colonnes était meilleur que celui de la méthode basée sur l'apposition de colonnes.

La formulation du problème de construction des quarts par un modèle de recouvrement semble naturelle. Par contre, elle présente des limites quand la matrice des contraintes est très grande. Ces limites sont en terme de temps de résolution si on optimise avec une méthode exacte ou en terme de qualité de la solution optimale lorsque la résolution se fait par une méthode heuristique. Or, l'exigence de la flexibilité dans l'établissement des quarts de travail se traduit dans les approches de recouvrement par une augmentation de la taille du modèle. Les méthodes implicites procurent une nouvelle voie dans la résolution des problèmes de construction des quarts.

2.2 Approche par modélisation implicite

Bechtold et Jacobs (1990) ont été les premiers à introduire l'approche implicite, suivis par Aykin (1996) avec une nouvelle formulation mathématique du modèle. Avant de présenter les deux modèles, nous modélisons le PCQT à l'aide des contraintes d'un modèle de transport, et de contraintes de couverture qui s'interprètent comme des contraintes de production. Pour cela, dénotons par $J = \{1, 2, \dots, |J|\}$ et $K = \{1, 2, \dots, |K|\}$ les ensembles des types de quart et des pauses, respectivement, et considérons des variables S_j et B_k correspondant aux types de quart (l'offre) et aux pauses

(la demande). Pour chaque type de quart j , il existe un ensemble $F(j) \subseteq K$ qui spécifie les pauses accessibles pour ce type de quart. De même, on définit $W(k) = \{j \in J : k \in F(j)\}$ l'ensemble des types de quart qui peuvent accéder à la pause k . À l'aide d'un graphe (voir la figure 2.1), on représente les types de quart $j \in J$ par des noeuds de départ et les pauses $k \in K$ par des noeuds de destination. Les arcs du graphe sont définis tel qu'un arc entre un noeud de départ j et un noeud de destination k existe si $k \in F(j)$, i.e., si la pause k est contenue dans la fenêtre de pause du type de quart j . À chaque arc (j, k) , on associe une variable de flot X_{jk} . Chaque unité de flot sur l'arc (j, k) indique qu'un employé affecté à un type de quart j prend sa pause dans la période couverte par la pause k . Notons que les variables de flot n'apparaissent pas dans la fonction objectif et qu'un coût c_j est associé à chaque variable S_j . L'ensemble des périodes est noté par I et la demande pour chaque période $i \in I$ est notée par d_i .

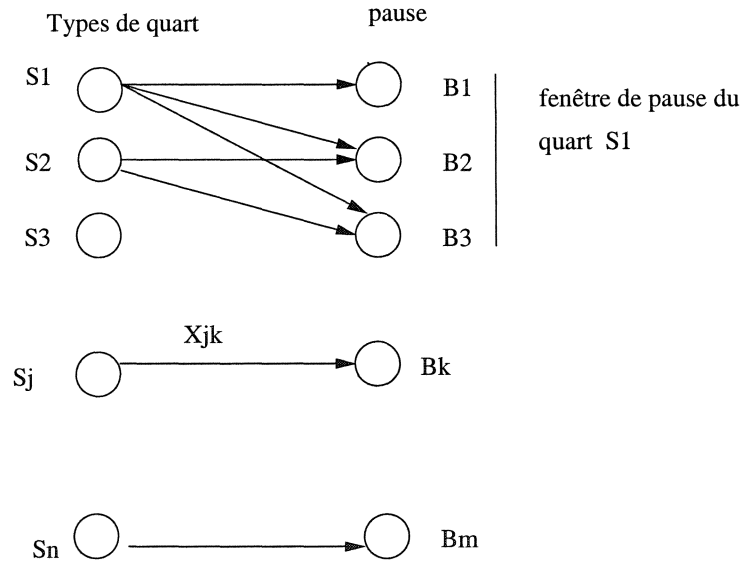


Figure 2.1 – Réseau sous-jacent au modèle de type transport

Finalement, définissons les paramètres suivant :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le type de quart } j \text{ couvre la période } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\rho_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si la pause } k \text{ couvre la période } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La formulation mathématique est la suivante :

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{j \in J} c_j S_j \quad (2.1)$$

sujet à

$$\sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j - \sum_{k \in K} \rho_{ik} B_k \geq d_i, \quad \forall i \in I \quad (2.2)$$

$$\sum_{k \in F(j)} X_{jk} - S_j = 0, \quad \forall j \in J \quad (2.3)$$

$$\sum_{j \in W(k)} X_{jk} - B_k = 0, \quad \forall k \in K \quad (2.4)$$

$$S_j \geq 0 \quad \text{entier}, \quad \forall j \in J \quad (2.5)$$

$$B_k \geq 0 \quad \text{entier}, \quad \forall k \in K \quad (2.6)$$

$$X_{jk} \geq 0 \quad \text{entier}, \quad \forall (j, k) \in J \times F(j). \quad (2.7)$$

La fonction objectif (2.1) vise à minimiser le coût total des types de quart choisis. Les contraintes (2.2) assurent que le nombre de types de quart en cours moins le nombre de pauses en cours soit plus grand ou égal à la demande pour chaque période. Les contraintes (2.3) assurent que pour chaque type de quart, le nombre d'employés qui travaillent ce quart doit être égal au nombre de ceux qui prennent leurs pauses dans la fenêtre de pause correspondant à ce quart. Les contraintes (2.4) assurent que pour chaque pause le nombre d'employés associé doit être égal au nombre d'employés des types de quart qui la contiennent.

Ce modèle de type transport a été introduit pour faciliter la présentation des modèles implicites et l'observation des réductions dans ces modèles, en nombre de variables et

contraintes par rapport au modèle de recouvrement. En effet, les modèles implicites sont inspirés de ce modèle de type transport, et ce dernier est équivalent au modèle de recouvrement comme il sera démontré dans le chapitre 3.

2.2.1 Modèle de Bechtold et Jacobs (1990)

Un des premiers modèles implicites est celui de Bechtold et Jacobs (1990), qui permet aussi une grande flexibilité. Les types de quart seulement sont explicites, l'affectation des pauses dans les quarts est implicite. l'idée est d'éliminer les variables X_{jk} en ajoutant des contraintes supplémentaires. L'affectation des pauses aux quarts se fait après avoir eu la solution optimale du modèle. Le modèle de Bechtold et Jacobs a été développé sous les hypothèses suivantes :

- la longueur de la journée est moins de 24 h ;
- chaque employé prend une seule pause ;
- la durée des pauses est identique pour tous les quarts ;
- chaque type de quart contient une seule fenêtre de pause ;
- il n'y a pas d'extra-chevauchement, i.e., aucune fenêtre de pause d'un type de quart n'est incluse strictement dans une fenêtre de pause d'un autre type de quart ;
- la sous-couverture n'est pas admise.

Les variables utilisées dans leur modèle sont les S_j et les B_k seulement. Les contraintes introduites dans leur modèle avec ces variables sont les suivantes : les contraintes de couverture (2.2) du modèle de transport et d'autres ensembles de contraintes qu'on appelle contraintes de contrôle ou contraintes Avant (Forward) et Arrière (Backward). Les contraintes Arrière sont définies pour chaque heure de début de fenêtre de pause, notée t , sauf pour l'heure de début la plus tôt :

Nombre de pauses débutant à t ou avant \geq Nombre de quarts pouvant utilisés ces pauses.

Les contraintes Avant sont définies pour chaque fin de fenêtre de pause, notée t , sauf pour l'heure de fin la plus tard :

Nombre de pauses débutant à t ou après \geq Nombre de quarts pouvant utilisés ces pauses.

Une dernière contrainte assure que le nombre de pauses soit égal au nombre de quarts. Ces trois ensembles de contraintes assurent pour un type de quart d'avoir une et une seule pause à l'intérieur de sa fenêtre de pause. Le modèle de Bechtold et Jacobs sera présenté au chapitre 3.

En faisant allusion au modèle de transport, on utilise ici seulement les variables de quart et les variables de pause et on élimine les variables de flot. Pour les contraintes, au lieu de considérer une contrainte pour chacun des noeuds de destination, on prend seulement les noeuds de début et de fin de la fenêtre de pause de chaque quart. Comme on le voit dans la figure 2.2, on considère seulement les noeuds hachurés. Les contraintes associées à ces noeuds vont assurer qu'on pourra affecter une pause à chaque quart retenu dans la solution optimale. Dans leur premier article de 1990, Bechtold et Jacobs n'ont pas démontré l'équivalence entre leur modèle et le modèle de recouvrement. L'expression équivalence a été utilisée seulement pour indiquer que les deux modèles procurent la même valeur optimale.

2.2.2 Modèle d'Aykin

Dans cette partie, nous décrivons le modèle d'Aykin (1996) pour le problème de base seulement. Dans ce modèle, on considère des variables de type de quart S_j et, pour chaque variable de quart, on associe des variables de pause admissible X_{jk} . Un premier ensemble de contraintes du modèle correspond à celui des contraintes de

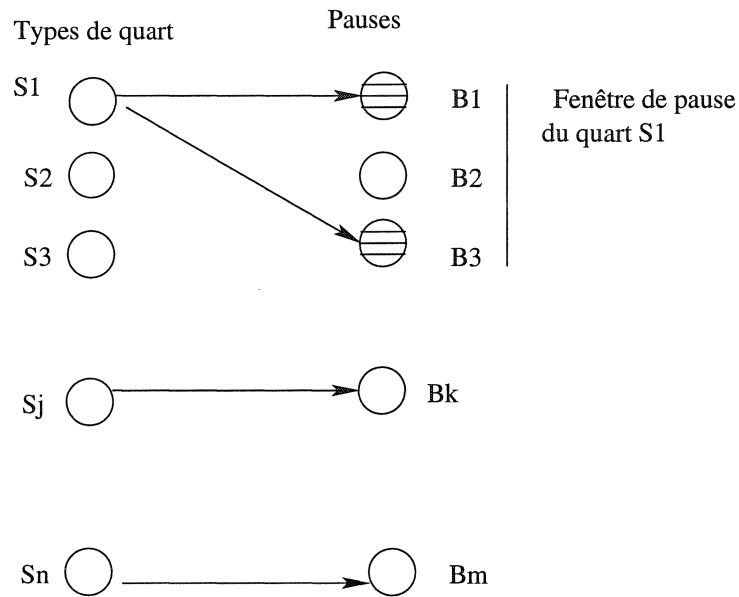


Figure 2.2 – Réseau sous-jacent au modèle de Betschold et Jacobs

couverture (2.2) dans lesquelles le nombre d'employés en pause s'écrit comme une somme des variables X_{jk} . Un deuxième ensemble de contraintes (2.3) assurent que le nombre d'employés prenant une pause dans chaque type de quart soit égal au nombre de ceux qui sont affectés à ce type de quart. L'objectif est de minimiser la somme des coûts des types de quart.

Le modèle ressemble en partie au modèle de transport avec contraintes de production où les noeuds de départ sont associés aux types de quart et les noeuds d'arrivée aux pauses admissibles. Les arcs relient chaque noeud j à un indice k d'une pause qui est incluse dans la fenêtre de pause du quart d'indice j . Pour diminuer le nombre de variables et le nombre de contraintes du modèle de transport, l'auteur élimine les variables de pause. Ainsi, les contraintes correspondantes qui assurent que, pour chacune des pauses, le nombre d'employés en pause soit égal au nombre d'employés qui travaillent sur des types de quart pouvant contenir cette pause sont aussi éliminées car elles sont incluses dans les contraintes de couverture.

L’auteur a présenté plusieurs travaux sur le modèle dans le cas où il y a plusieurs fenêtres de pause par quart (heuristique pour la résolution, comparaison avec les autres approches). Ceux-ci seront présentés dans le troisième chapitre.

2.2.3 Equivalence entre les modèles

Betchold et Jacobs (1996) ont démontré que leur modèle est équivalent au modèle de recouvrement lorsqu’il n’y a pas d’extra-chevauchement dans le cas où il y a des contraintes d’intégrité. De leur côté, Rekik et al. (2002) ont démontré l’équivalence entre les relaxations linéaires du modèle de Betchold et Jacobs et du modèle de transport avec contraintes de production lorsqu’il n’y a pas d’extra-chevauchement. Leur preuve utilise les coupes de Benders. En effet, en appliquant la décomposition de Benders au modèle de transport avec contraintes de production, ils obtiennent un ensemble de contraintes plus compact qui élimine les variables de flot du modèle. Ensuite, en utilisant la relation d’ordre sur les types de quart et les pauses associées aux rayons extrêmes du dual du modèle, ils ont réduit l’ensemble des contraintes en deux autres ensembles de contraintes plus compacts, les contraintes Arrière et Avant mentionnées ci-haut.

Cezik et al. (2004) ont aussi démontré l’équivalence des relaxation linéaires en utilisant des coupes minimales. L’idée consiste à faire une projection sur les variables S_j et B_k dans le modèle de transport. Cette projection peut se faire dans le problème de flot bipartite. A l’aide du théorème ”Max flow min cut” , ils montrent que les contraintes de transport se réduisent en une seule contrainte qui est la coupe minimale du problème de flot. A partir de cette contrainte, on déduit les contraintes Arrière et Avant du modèle de Betchold et Jacobs.

L’équivalence entre le modèle d’Aykin (1996) et le modèle de transport est évidente.

Il suffit de remplacer, dans les contraintes (2.2), les variables B_k par leurs expressions en fonction des X_{jk} définies par les contraintes (2.4).

2.2.4 Modèles de cycles et quarts

Dans cette partie, nous présentons une revue de littérature sur le problème de construction des cycles et des quarts, dans le cas où les modèles proposés utilisent une extension du modèle d'Aykin (1996) ou celui de Bechtold et Jacobs (1990).

Topaloglu et al. (2002) présentent un modèle implicite de construction des cycles et des quarts simultanément en combinant le modèle d'Aykin avec celui de Bailey (1985) tout en y apportant des modifications appropriées. Comme hypothèses, ils supposent des journées de travail de moins de 24 heures pendant 7 jours avec deux jours de repos par semaine. Leur modèle est une extension du modèle d'Aykin défini pour un horizon d'un jour avec des variables appropriées (des variables de patron de quart) en plus des variables de type de quart et des variables de pause. Ici, un patron de quart correspond à une suite de jours de travail et de jours de repos. Ils appliquent le modèle d'Aykin aux variables de type de quart et aux variables de pause. Ils ajoutent un ensemble de contraintes tirées du modèle de Bailey qui assurent que le nombre d'employés affectés à des patrons de quart dont le jour i est un jour de travail soit égal au nombre d'employés affectés à tous les types de quart du jour i . Le modèle testé pour certains exemples comportait seulement 112 variables ce qui est bien moins que les 700 000 requises pour le modèle de recouvrement. La moyenne des temps de résolution était 161 fois moins élevée que celle obtenue avec le modèle de recouvrement. Le modèle de recouvrement a permis de résoudre à l'optimalité seulement trois des six tests effectués.

Bard et al. (2002) présentent aussi un modèle de construction de cycles et quarts simultanément en utilisant le modèle de Bechtold et Jacobs avec ajout de certaines

contraintes introduites par Burns (1985) pour permettre aux employés de prendre deux jours de repos consécutifs. Comme hypothèses, ils supposent des journées de travail de 24 heures pendant 7 jours avec deux jours de repos. Pour chaque jour, ils associent des variables appropriées comme par exemple, des variables pour les types de quart à temps partiel, d'autres pour les types de quart à temps plein. Ils ajoutent des variables w_j qui représentent le nombre total d'employés qui travaillent sur les quarts de même type j toute la semaine. Ils ajoutent aussi un ensemble de contraintes tirées du modèle de Burns qui donnent deux bornes sur les variables w_j . La première borne assure que chaque employé prend deux jours de repos, la seconde est nécessaire pour assurer qu'il y a suffisamment d'employés pour couvrir la demande de chaque journée. Le modèle est résolu par le logiciel commercial Cplex. La solution donne le nombre d'employés pour chaque type de quart à chaque jour et le nombre de pauses pour chaque période. D'autres algorithmes sont utilisés pour l'affectation des pauses aux quarts et l'affectation des jours de travail aux cycles. Le modèle a été testé avec un nombre de variables entre 837 et 1440 ce qui a donné un temps de résolution entre 1180 et 4435 secondes.

Les deux modèles discutés, celui de Topalugo et al. et celui de Bard et al., montrent l'intérêt porté au modèle de Bechtold et Jacobs et celui d'Aykin. Cet intérêt se résume dans la réduction de la taille des modèles lorsque l'on traite le problème de construction des quarts et des cycles simultanément.

2.3 Contributions

Dans ce mémoire, nous présentons une extension du modèle de Bechtold et Jacobs (1990) dans le cas où il y a une grande flexibilité dans les types de quart et nous proposons une méthode d'affectation des pauses aux quarts. On fait aussi une extension

du modèle d'Aykin (1996) qui permettra de faire une comparaison avec le modèle étendu de Bechtold et Jacobs sur des jeux de données différents. Cette comparaison nous permet d'établir les limites (le temps de résolution, la taille de la matrice des contraintes) de chacun des modèles dans un cas plus général. On applique aussi ces deux modèles pour le cas de la construction des quarts sur un horizon d'une semaine en utilisant une stratégie de décomposition temporelle. Cette méthode diminue le temps de résolution des deux modèles dans le cas où le nombre de quarts est très élevé.

CHAPITRE 3 : EXTENSION DES TROIS MODÈLES

Dans ce chapitre, nous faisons une extension des trois modèles dans le cas général où il y a une grande flexibilité dans les types de quart et dans les pauses. Cette flexibilité peut être définie par :

- des types de quart avec plusieurs durées et différentes plages de temps, par exemple, il y a des types de quart de jour, de soir et de nuit ;
- un nombre variable de pauses d'un type de quart à un autre ;
- plusieurs décompositions de la durée totale de pause ;
- la présence de contraintes d'espacement entre les pauses.

Sous ces hypothèses, nous allons définir les variables nécessaires pour chaque modèle (section 3.1). Ensuite, nous donnons les formulations mathématiques de chaque modèle (sections 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5). À la fin, nous proposons une méthode d'affectation des pauses aux quarts (section 3.6) et nous démontrons l'équivalence entre le modèle de transport et celui de Dantzig (section 3.7)

Au début, nous précisons quelques termes utilisés dans la génération des variables.

Pause imposée : Une pause de durée fixe, qui peut être placée au début ou à la fin d'un quart.

Pause décomposable : Une pause décomposée en plusieurs parties non-consécutives dans le temps. Une telle pause doit respecter un profil de pause (voir définition ci-bas).

Pause à durée déterminée : Une pause non-décomposée dont la durée est fixe. Elle doit avoir lieu dans une fenêtre de pause spécifiée.

Fenêtre de pause : Un intervalle de temps durant lequel une pause ou une partie de pause peut se placer.

Profil de pause : Une suite de parties de pause. Chaque partie a une durée fixe et est associée à une fenêtre de pause pour un type de quart. Chacune des pauses de la séquence doit appartenir à une fenêtre de pause.

Type de quart : Un horaire de travail qui spécifie l'ensemble des périodes de travail sans indication des pauses. Il est caractérisé par une heure de début, une durée, et plusieurs fenêtres de pause. Il génère un ensemble de quarts lorsqu'on introduit les pauses.

Type de pause : Il y a trois type de pause : imposée, décomposable et à durée déterminée.

Plage d'activité : Un intervalle de temps défini par une heure de début et une heure de fin durant lequel s'applique une durée minimale et une durée maximale de temps consécutif à respecter entre deux pauses, entre le début du quart et une pause, ou entre une pause et la fin d'un quart.

En ce qui concerne la plage d'activité associée à un type de quart, ici on travaille dans le cadre d'un seul type d'activité mais la longueur minimale, notée x_a , et maximale, notée y_a (l'indice a correspond à activité), peut changer d'une plage d'activité à une autre. Il existe trois plages d'activité, soit le matin, le soir ou la nuit. Souvent, les quarts chevauchent deux plages d'activité, i.e., on peut trouver un quart avec un début dans une plage d'activité et une fin dans une autre. Pour déterminer dans quelle plage d'activité est située le quart, il y a deux façons : la première consiste à choisir la plage d'activité qui a le plus grand chevauchement avec le quart. La seconde tient compte de toutes les plages d'activité qui chevauchent le quart. Dans cette dernière, lorsqu'on passe d'une plage d'activité à une autre pour un même quart, il faut respecter les règles des deux plages d'activité. Cela se fait en prenant le maximum (resp. minimum) des durées minimales (resp. maximales) d'activité.

3.1 Génération des variables

La construction des quarts de travail à l'aide des modèles proposés nécessite la connaissance des variables à utiliser dans chaque modèle. Or, dans la réalité, les données recueillies ne nous permettent pas d'obtenir ces variables directement. Par contre, l'information disponible sur les préférences de l'entreprise dans l'organisation du travail ainsi que les préférences des employés nous permettent de le faire. En général, on a les informations suivantes sur l'organisation du travail d'une entreprise :

- Les types de quart possibles ;
- Les différentes plages d'activité ;
- Les pauses et les profils de pause possibles ;
- La demande pour chaque jour de l'horizon considéré.

À partir de ces données, nous devons générer les variables de type de quart et les variables de pause. En ce qui concerne les variables de pause, leur génération se fait suivant le modèle étudié, car ces variables ont des interprétations différentes d'un modèle à un autre.

3.1.1 Les variables de type de quart

La génération des types de quart qui vont définir les variables des modèles considérés se fait suivant le type de pause et la plage d'activité associée au type de quart. Les pauses dans un type de quart peuvent se présenter selon trois cas. Dans le premier cas, le type de quart admet une pause décomposable seulement. Dans le deuxième cas, il comporte une pause décomposable et une pause avec durée déterminée. Dans le dernier cas, il y a une cohabitation, i.e. présence d'une pause imposée et d'une pause décomposable.

Dans notre construction, nous allons considérer seulement le cas où le type de quart admet une pause décomposable car les deux autres cas sont des cas particuliers. Pour les règles d'activité à appliquer au type de quart, on utilise les règles de la plage d'activité qui chevauche le plus avec le type de quart. Cette construction se fait en deux étapes pour chaque type de quart. Dans la première étape, on énumère les profils de pause, ensuite on définit les bornes (début et fin) des fenêtres de pause qui caractérisent chaque type de quart.

Etape 1 :

L'énumération des profils de pause se fait en utilisant la durée totale t , la durée minimale x_p et maximale y_p (l'indice p correspond à pause) permise de la pause. Cette énumération revient à décomposer la durée totale t en plusieurs durées dont la somme donne la valeur t . De plus, les valeurs que peuvent prendre ces durées doivent appartenir à l'ensemble $\{x_p, x_p + d, x_p + 2d, \dots, y_p\}$ où d représente la durée d'une période. Par exemple, pour une pause d'une durée totale de 120 minutes, de durée minimale (resp. maximale) de 30 (resp. 60) minutes et $d = 15$ minutes, on obtient les profils de pause suivants : (30,30,30,30), (30,30,60), (30,45,45), (30,60,30), (45,30,45), (45,45,30), (60,30,30) et (60,60).

Etape 2 :

Dans cette étape, pour chaque type de quart et pour chaque profil de pause, on définit les débuts et les fins des fenêtres de pause associées, qu'on note respectivement D_{ip} et F_{ip} où l'indice i correspond à l'indice du type de quart et l'indice p au rang de la fenêtre. Pour trouver les bornes de chaque fenêtre, on utilise les deux équations suivantes :

$$D_{ip} = D_{i(p-1)} + x_a + l_{(p-1)},$$

$$F_{ip} = F_{i(p-1)} + y_a + l_{(p-1)},$$

pour tout $p = 1, \dots, m$, où m correspond au nombre de fenêtre de pauses, l_p à la durée de la pause qu'on place dans la fenêtre de position p , $D_{i0} = F_{i0}$ au début du type de quart et $l_0 = 0$.

Dans le cas où la dernière fenêtre ne respecterait pas les durées x_a et y_a par rapport à la fin du type de quart, on répète la même procédure, en commençant cette fois-ci par la fin du type de quart, et en utilisant les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} D'_{ip} &= D'_{i(p+1)} - x_a - l_{(p+1)}, \\ F'_{ip} &= F'_{i(p+1)} - y_a - l_{(p+1)}, \end{aligned}$$

pour tout $p = m, \dots, 1$, $D'_{i(m+1)} = F'_{i(m+1)}$ correspond à la fin du type de quart, D' (resp. F') au début (resp. fin) de la fenêtre de pause en position p associée au type de quart i dans cette deuxième procédure et $l_{(m+1)} = 0$.

Finalement, si $D_{ip} \geq D'_{ip}$ (resp. $F_{ip} \leq F'_{ip}$), on choisit comme début (resp. fin) D_{ip} (resp. F_{ip}) pour la fenêtre de pause de position p et inversement.

3.1.2 Les variables de pause

Après la génération des types de quart, on procède à la génération des variables de pause comme suit. Cette génération des variables de pause se fait suivant le contexte du modèle en considération. Dans le modèle de Dantzig, puisqu'il n'existe pas de variable de pause, on utilise seulement les variables de quart. Par contre, dans les modèles implicites, on aura pour chacun des deux modèles une définition des pauses différentes.

Pour le modèle de Bechtold et Jacobs, une variable de pause B_k , $k \in K$, est définie comme étant le nombre total d'employés prenant la pause k , indépendamment du

type de quart auxquels ils sont affectés. La génération de ces variables se fait en parcourant toutes les périodes à l'intérieur des fenêtres de pause. On associe ensuite, à chaque période d'une fenêtre, une partie de pause qui aura comme caractéristique une position, un début et une durée. Lorsqu'une pause se répète, i.e. si elle possède les mêmes caractéristiques qu'une autre pause, on n'en tient pas compte.

Pour le modèle d'Aykin, les variables de pause sont définies telles que pour chaque type de quart et pour chaque période à l'intérieur d'une fenêtre de pause associée, on définit une variable de pause X_{jk} , $j \in J$ et $k \in K$, qui s'interprète comme le nombre d'employés travaillant sur un quart de type j et prenant la pause k .

3.1.3 Les variables de quart

Les variables de quart sont utilisées seulement dans le contexte du modèle de recouvrement. La génération de ces variables se fait en utilisant les variables de type de quart et les variables de pause associées telles qu'elles sont définies dans le contexte du modèle d'Aykin. Dans le cas du problème de base, i.e., un type de quart avec une seule fenêtre de pause, la génération de ces variables est très simple car il suffit d'affecter à chaque pause possible de la fenêtre de pause une variable de quart.

Dans notre cas, chaque type de quart possède plusieurs fenêtres de pause. Donc, pour définir une variable de quart, il suffit de choisir une seule pause dans chaque fenêtre de pause. Mais, ces choix doivent respecter les règles sur l'espacement exigé entre les pauses. Pour cela, nous proposons l'algorithme 3.1 qui utilise une fonction récursive définie par l'algorithme 3.2 sous les notations suivantes :

Liste-Pauses LP : liste de l'ensemble des variables de pause en position 1 ;

Liste-Associée LA : liste des variables de pause d'une fenêtre à la position p associée à une pause de la fenêtre à la position $p - 1$, en respectant la durée minimale et

la durée maximale de l'activité. Une liste associées à une pause p sera noté $p.LA$;

Liste-Quart Q : liste des variables de quart à générer.

Liste-Pause-Quart LPQ : liste qui contient une suite de pauses dont chacune d'elles appartient à une fenêtre d'un type de quart et les espacements entre ces pauses respectent les durées minimale et maximale d'activité. Cette liste sera affectée à un quart qu'on note q .

Algorithme 3.1 Générer les quarts (LP)

```

pour tout  $p \in LP$  effectuer
     $LPQ = \emptyset$ 
     $LPQ \leftarrow LPQ \cup \{p\}$ 
    si  $p.LA.size() \neq 0$  alors
         $GenererListe(LPQ)$ 
    sinon
         $q \leftarrow LPQ$ 
         $Q \leftarrow Q \cup \{q\}$ 

```

Algorithme 3.2 GénérerListe (LPQ)

```

 $v \leftarrow LPQ.dernier()$ 
si  $v.LA.size() \neq 0$  alors
    pour tout  $v' \in LA$  effectuer
         $NouveauLPQ \leftarrow LPQ \cup \{v'\}$ 
         $GenererListe(NouveauLPQ)$ 
    sinon
         $q \leftarrow LPQ$ 
         $Q \leftarrow Q \cup \{q\}$ 

```

Par exemple, pour un type de quart qui admet deux fenêtres de pause, la première de longueur deux périodes et la deuxième de longueur trois périodes et chaque pause est d'une durée 30 minutes, on génère six quarts qui ont le même début et la même fin et qui possède au moins une pause dont le début est différent du début des pauses des autres quarts, comme on le voit dans la figure 3.1.

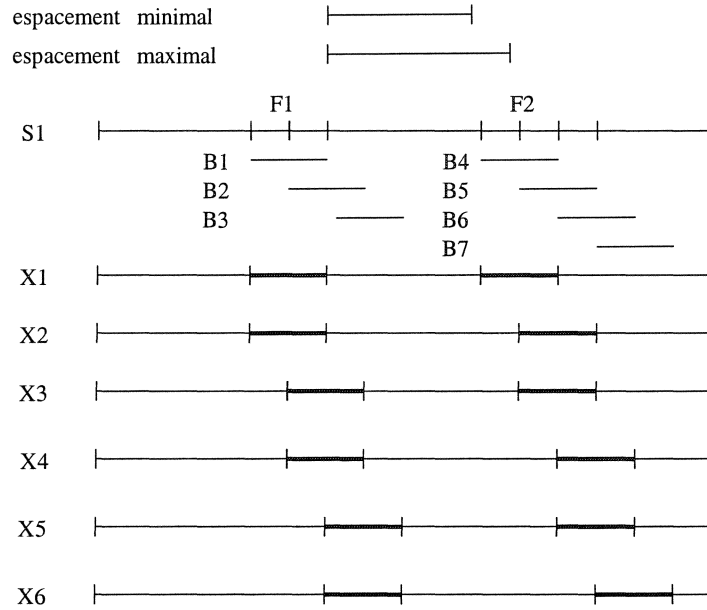


Figure 3.1 – Génération de quarts

3.2 Modèle de Dantzig

La formulation mathématique du modèle de recouvrement a été introduite par Dantzig (1954). Dans cette formulation, chaque quart est représenté par une variable de décision. Nous présentons le modèle de recouvrement dans sa version la plus commune, qui s'adapte à toute extension des facteurs considérés :

$$\text{Minimiser } \sum_{k=1}^n c_k X_k$$

sujet à :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} X_k \geq d_i \quad \forall i \in I \quad (3.1)$$

$$X_k \geq 0, \text{ entier} \quad \forall k \in K. \quad (3.2)$$

La notation est la suivante :

- I : l'ensemble des périodes de l'horizon ;
- $K = 1, \dots, n$: l'ensemble des quarts ;
- d_i : le nombre d'employés nécessaire dans la période i pour exécuter la charge de travail ;
- c_k : le coût d'affectation d'un employé au quart k ;
- a_{ik} : un paramètre binaire qui vaut 1 si le quart k couvre la période i et 0 sinon ;
- X_k : une variable entière qui définit le nombre d'employés affectés au quart k .

Sous cette formulation, toutes les combinaisons de type de quart, début de quart, et placement des pauses sont énumérées et incluses dans l'ensemble K , comme étant des quarts. L'énumération des quarts à partir des variables de type de quart définies dans la section 3.1.3 peut être appliquée dans le cas de plusieurs fenêtres de pause. Pour chacun des types de quart, on génère un ensemble de quarts correspondant.

3.3 Extension du modèle de Bechtold et Jacobs

L'extension du modèle de Bechtold et Jacobs (1990) sous les hypothèses de flexibilité citées ci-dessus, tient surtout compte, par rapport au modèle de base, de la présence de plusieurs fenêtres de pause et de l'espacement entre deux pauses consécutives appartenant chacune à une fenêtre de pause différente. Pour les contraintes de contrôle des pauses, il suffit d'introduire, comme dans le modèle de base, des contraintes Avant et Arrière pour chaque fenêtre de pause. On définit ensuite les contraintes d'espacement entre les pauses.

Pour pouvoir décrire ces deux ensembles de contraintes, nous allons définir des relations d'ordre total sur l'ensemble des types de quart J et l'ensemble des pauses K . Cette définition s'applique pour chaque ensemble de fenêtres de même position quelque soit le type de quart. Un type de quart j_1 est plus petit qu'un type de quart

j_2 (qu'on note $j_1 < j_2$) si j_1 commence avant j_2 ou, s'ils ont le même début, j_1 prend fin avant j_2 . Si les deux types de quart ont le même début et la même durée alors $j_1 < j_2$ si la fenêtre de pause du type de quart j_1 commence avant celle de j_2 ou, s'ils ont le même début, celle de j_1 finit avant celle de j_2 . De façon similaire, une pause k_1 est plus petite qu'une pause k_2 (qu'on note $k_1 < k_2$) si la pause k_1 commence avant k_2 ou si les deux commencent en même temps et k_1 prend fin avant k_2 . Alors, les concepts d'éléments minimal et maximal dans les ensembles J et K s'ensuivent directement.

Tout d'abord, nous allons donner la formulation pour une seule fenêtre de pause. Ensuite, nous ferons l'extension au cas général. Pour cela soit K^s (resp. K^e), l'ensemble des premières (resp. dernières) pauses de chaque fenêtre de pause et F_j la fenêtre de pause du type de quart d'indice j . Alors, $K^s = \bigcup_{j \in J} \min(F_j)$, où $\min(F_j) = \min\{k | k \in F_j\}$, et $K^e = \bigcup_{j \in J} \max(F_j)$ où $\max(F_j) = \max\{k | k \in F_j\}$. Aussi, pour chaque pause $k \in K^s$, on considère l'ensemble $K^B(k)$ de toutes les pauses k' qui viennent après la pause k , i.e., $K^B(k) = \{k' \in K | k \leq k'\}$, et l'ensemble $J^B(k)$ de tous les types de quart $j \in J$, dont les fenêtres de pause commencent après la pause k , i.e., $J^B(k) = \{j \in J | F_j \in K^B(k)\}$. On définit de façon similaire pour chaque pause $k \in K^e$ l'ensemble $K^F(k) = \{k' \in K | k' \leq k\}$ des pauses qui commencent avant k , et l'ensemble $J^F(k) = \{j \in J | F_j \subseteq K^F(k)\}$ de tous types de quart dont la fenêtre de pause finit avant ou avec la pause k . On note aussi par $k^s = \min\{k \in K^s\}$ et $k^e = \max\{k \in K^e\}$ la première et la dernière pause, respectivement dans l'ensemble des pauses K^s et K^e . Ci-haut, les indices supérieurs F et B font référence aux contraintes de contrôle Avant (Forward) et Arrière (Backward). Les notations suivantes sont aussi utilisées dans la formulation :

- S_j : une variable entière qui indique le nombre d'employés affectés au type de quart j ;

- B_k : une variable entière qui indique le nombre total d'employés prenant la pause k ;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le type de quart } j \text{ couvre la période } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\rho_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si la pause } k \text{ couvre la période } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le modèle de Bechtold et Jacobs (1990) s'écrit alors :

$$\text{Minimiser } \sum_{j=1}^n c_j S_j \quad (3.3)$$

sujet à :

$$\sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j - \sum_{k \in K} \rho_{ik} B_k \geq d_i \quad \forall i \in I \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in J} S_j - \sum_{k \in K} B_k = 0 \quad (3.5)$$

$$\sum_{k' \in K^F(k)} B_{k'} - \sum_{j \in J^F(k)} S_j \geq 0 \quad \forall k \in K^s \setminus \{k^s\} \quad (3.6)$$

$$\sum_{k' \in K^B(k)} B_{k'} - \sum_{j \in J^B(k)} S_j \geq 0 \quad \forall k \in K^e \setminus \{k^e\} \quad (3.7)$$

$$B_k \geq 0 \quad \text{entier} \quad \forall k \in K \quad (3.8)$$

$$S_j \geq 0 \quad \text{entier} \quad \forall j \in J. \quad (3.9)$$

Les contraintes de couverture (3.4) assurent pour chaque période de l'horizon que le nombre d'employés qui travaillent pendant cette période doit être au moins égal à la demande. Les contraintes de contrôle (3.6) et (3.7), Arrière et Avant, assurent pour chaque période, chaque position et chaque profil que le type de quart possède au moins une pause dans la fenêtre de pause considérée. La contrainte d'égalité (3.5) assure l'unicité de la pause dans la fenêtre de pause d'un type de quart. Ici on remarque qu'il n'a pas de contraintes d'espacement, car il n'y a qu'une seule fenêtre de pause.

Pour l'extension du modèle au cas avec plusieurs fenêtres de pause, la construction des contraintes Arrière et Avant et des contraintes d'espacement peut se faire en sous-ensembles de contraintes selon les trois critères suivants : la plage d'activité, la position des fenêtres de pause et le profil de pause du type de quart. Le premier est nécessaire lorsqu'on tient compte des espacements car on a besoin des durées minimale et maximale de la plage d'activité. Donc, pour chaque plage d'activité, on construit un ensemble de contraintes d'espacement. Dans cette construction, on considère seulement les pauses qui appartiennent à des types de quart qui chevauchent avec cette plage d'activité. La position de la fenêtre de pause est aussi nécessaire car, pour construire les contraintes Arrière et Avant, on suppose dans le problème de base qu'on a une seule fenêtre de pause. Donc, on va construire pour chaque fenêtre son ensemble de contraintes Arrière et Avant. Finalement, pour le troisième critère qui est le profil, on construit les contraintes pour les pauses qui ont les mêmes durées car, dans les hypothèses du problème de base, les pauses ont la même durée.

Les notations suivantes sont utilisées :

- P : l'ensemble des positions des fenêtres de pause ;
- P^* : l'ensemble des positions des fenêtres de pause à l'exception de la dernière position ;
- R : l'ensemble des profils de pause ;
- T : l'ensemble des plages d'activité ;
- r : l'indice d'un profil de pause ;
- p : l'indice de la position d'une fenêtre de pause ;
- t : l'indice d'une plage d'activité ;
- J_{tr} : l'ensemble des types de quart de même plage d'activité t et de même profil de pause r ;
- F_{jp} : la fenêtre de pause en position p dans le type de quart j ;
- K_{tpr} : l'ensemble des pauses dont la fenêtre de pause est en position p dans les types de quart ayant un profil de pause r et de plage d'activité t ;

- FP_{kp} : l'ensemble des pauses en position $p + 1$ accessibles à partir de la pause k en position p . Une pause est accessible si l'espacement entre k et celle-ci respecte les durées minimale et maximale de l'activité.

Les ensembles K_{tpr}^s (resp. K_{tpr}^e) ont la même définition que les ensembles K^s (resp. K^e), mais ici ces ensembles s'appliquent pour toutes les pauses associées aux fenêtres de pause de position p de tous les types de quart avec profil r et plage d'activité t . De même pour les autres ensembles utilisées dans les contraintes Avant et Arrière du modèle de base, on remplace K^F par K_{tpr}^F , K^B par K_{tpr}^B , J^F par J_{tpr}^F et J^B par J_{tpr}^B .

Pour écrire les contraintes d'espacement maximum et minimum, on les considère comme des contraintes Avant (espacement minimal) et Arrière (espacement maximal) sous d'autres conditions. Soit $L_{t(p+1)r}^s$ (resp. $L_{t(p+1)r}^e$) l'ensemble des premières (resp. dernières) pauses en position $(p + 1)$ associées aux fenêtres de pause de toutes les pauses à la position p dans les types de quart de même profil r et de même plage d'activité t . Alors, $L_{t(p+1)r}^s = \bigcup_{k \in K_{t(p+1)r}} \min(FP_{kp})$, où $\min(FP_{kp}) = \min\{k | k \in FP_{kp}\}$, et $L_{t(p+1)r}^e = \bigcup_{k \in K_{t(p+1)r}} \max(FP_{kp})$, où $\max(FP_{kp}) = \max\{k | k \in FP_{kp}\}$. Aussi, pour chaque pause $k \in L_{t(p+1)r}^s$, on considère l'ensemble $L_{tpr}^B(k)$ de toutes les pauses k' en position $p + 1$ qui viennent après la pause k , i.e. $L_{tpr}^B(k) = \{k' \in K_{t(p+1)r} | k \leq k'\}$. De plus, définissons l'ensemble $M_{tpr}^B(k)$ de toutes les pauses $k \in K_{tpr}$, dont les fenêtres de pause commencent après ou avec la pause k , i.e., $M_{tpr}^B(k) = \{k \in K_{tpr} | FP_{kp} \in L_{tpr}^B(k)\}$. On définit de façon similaire pour chaque pause $k \in L_{t(p+1)r}^e$ l'ensemble $L_{tpr}^F(k)$ de toutes les pauses k' en position $p + 1$ qui viennent avant la pause k , i.e., $L_{tpr}^F(k) = \{k' \in K_{t(p+1)r} | k' \leq k\}$. Définissons aussi l'ensemble $M_{tpr}^F(k) = \{k \in K_{tpr} | FP_{kp} \subseteq L_{tpr}^F(k)\}$ de toutes les pauses en position p , dont les fenêtres de pause commencent avant ou avec la pause k . On note aussi par $l_{tpr}^s = \min\{k \in L_{t(p+1)r}^s\}$ et $l_{tpr}^e = \max\{k \in L_{t(p+1)r}^e\}$ la première et la dernière pause, respectivement, dans l'ensemble des pauses $K_{t(p+1)r}$ de même position pour les types de quart ayant le même profil et la même plage d'activité.

À l'aide de ces notations, le modèle se formule comme suit :

$$\text{Minimiser } \sum_{j=1}^n c_j S_j \quad (3.10)$$

sujet à :

$$\sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j - \sum_{k \in K} \rho_{ik} B_k \geq d_i \quad \forall i \in I \quad (3.11)$$

$$\sum_{k' \in K_{ptr}^F(k)} B_{k'} - \sum_{j \in J_{ptr}^F(k)} S_j \geq 0 \quad \forall r \in R, t \in T, p \in P, k \in K_{ptr}^e \setminus \{k_{ptr}^e\} \quad (3.12)$$

$$\sum_{k' \in K_{ptr}^B(k)} B_{k'} - \sum_{j \in J_{ptr}^B(k)} S_j \geq 0 \quad \forall r \in R, t \in T, p \in P, k \in K_{ptr}^s \setminus \{k_{ptr}^s\} \quad (3.13)$$

$$\sum_{j \in J_{ptr}} S_j - \sum_{k \in K_{ptr}} B_k = 0 \quad \forall r \in R, t \in T, p \in P \quad (3.14)$$

$$\sum_{k' \in L_{ptr}^F(k)} B_{k'} - \sum_{k' \in M_{ptr}^F(k)} B_{k'} \geq 0 \quad \forall r \in R, t \in T, p \in P^*, k \in L_{ptr}^e \setminus \{l_{ptr}^e\} \quad (3.15)$$

$$\sum_{k' \in L_{ptr}^B(k)} B_{k'} - \sum_{k' \in M_{ptr}^B(k)} B_{k'} \geq 0 \quad \forall r \in R, t \in T, p \in P^*, k \in L_{ptr}^s \setminus \{l_{ptr}^s\} \quad (3.16)$$

$$B_k \geq 0 \quad \text{entier} \quad \forall k \in K \quad (3.17)$$

$$S_j \geq 0 \quad \text{entier} \quad \forall j \in J. \quad (3.18)$$

Les contraintes de couverture (3.11) assurent pour chaque période de l'horizon que le nombre d'employés qui travaillent pendant cette période doit être au moins égal à la demande. Les contraintes de contrôle (3.12) et (3.13), Arrière et Avant, assurent pour chaque période, chaque position et chaque profil que le type de quart possède au moins une pause dans la fenêtre de pause considéré. La contrainte d'égalité (3.14) assure l'unicité de la pause dans la fenêtre de pause d'un type de quart. Les contraintes d'espacement minimale et maximale (3.15) et (3.16) garantissent que pour un quart donné, la différence entre le début de chaque pause en position $(p+1)$ et la fin d'une pause en position p , doit être inférieure (resp. supérieure) à la durée maximale (resp. minimale) de l'activité, comme on peut le voir dans la figure. 3.2.

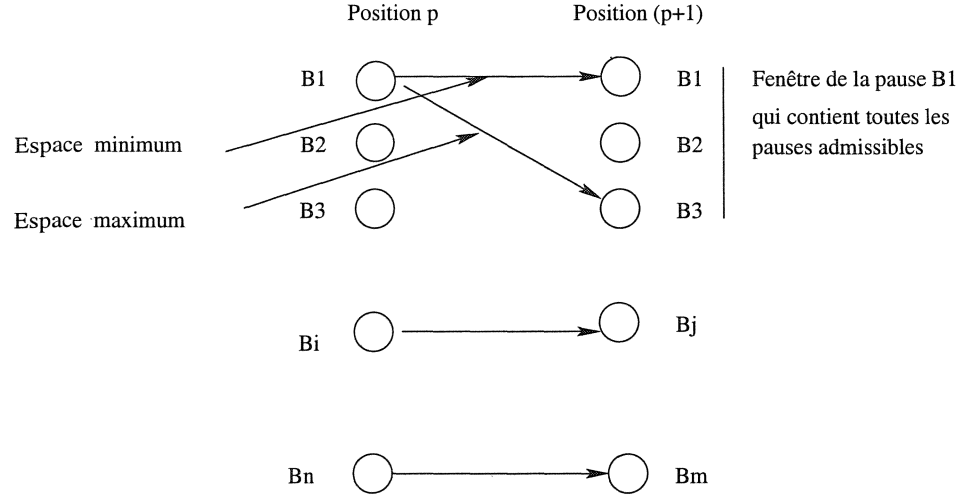


Figure 3.2 – Contraintes d'espacement

3.3.1 Modèle de Bechtold et Jacobs de densité réduite

Dans le modèle de Bechtold et Jacobs (1990), on remarque qu'on peut réduire la densité de la matrice des contraintes, et cela en faisant une modification dans la formulation des contraintes Avant et Arrière du modèle de base. Pour voir l'idée de cette modification, considérons un exemple avec trois types de quart 1, 2 et 3 ayant les pauses admissibles d'indices 1 et 2, d'indices 2 et 3 et d'indices 3 et 4, respectivement. Dans ce cas, les contraintes Avant s'écrivent :

$$B_1 + B_2 - S_1 \geq 0$$

$$B_1 + B_2 + B_3 - S_1 - S_2 \geq 0$$

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 - S_1 - S_2 - S_3 \geq 0$$

En ajoutant deux variables supplémentaires non négatives X_0 et X_1 , on obtient :

$$B_1 + B_2 - S_1 = X_0$$

$$X_0 + B_3 - S_2 = X_1$$

$$X_1 + B_4 - S_3 = X_2$$

On remarque alors une réduction de trois coefficients dans la matrice des contraintes considérée. Pour le cas général, considérons les ensembles de contraintes Avant (3.15) et Arrière (3.16). Pour le premier ensemble, on introduit des variables supplémentaires X_0, X_1, \dots, X_n . Ensuite, on ordonne les éléments de l'ensemble $K^s \setminus \{k^s\}$ en ordre croissant pour obtenir une suite k_0, k_1, \dots, k_n . On considère aussi les deux ensembles $R^F(k_i) = \{k' \in K | k_{i-1} < k' \leq k_i\}$ et $J^F(k_i) = \{j \in J | k_j^f \in R^F(k_i)\}, \forall i = 1, \dots, n$, où k_j^f correspond à la fin de la fenêtre de pauses du type de quart j . Pour $i = 0$, les ensembles considérés sont $R^F(k_0) = \{k' \in K | k_0 \leq k' \leq k^s\}$ et $J^F(k_0) = \{j \in J | k_j^f \in R^F(k_0)\}$.

Avec ces notations, on définit les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k' \in R^F(k_0)} B_{k'} - \sum_{j \in J^F(k_0)} S_j - X_0 &= 0 \\ X_{i-1} + \sum_{k' \in R^F(k_i)} B_{k'} - \sum_{j \in J^F(k_i)} S_j - X_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

où $k_i \in K^s \setminus \{k^s\}$. De même, pour les contraintes Arrière, soit Y_0, Y_1, \dots, Y_n une suite de variables supplémentaires à introduire dans le modèle. On ordonne les éléments de l'ensemble $K^e \setminus \{k^e\}$ en ordre décroissant, on obtient une suite k_0, k_1, \dots, k_n et on considère aussi les deux ensembles $R^B(k_i) = \{k' \in K | k_{i-1} < k' \leq k_i\}$ et $J^B(k_i) = \{j \in J | k_j^d \subseteq R^B(k_i)\}, \forall i = 1, \dots, n$, où k_j^d correspond au début de la fenêtre de pauses du type de quart j . Pour $i = 0$, les ensembles considérés sont $R^B(k_0) = \{k' \in K | k^e \leq k' \leq k_0\}$ et $J^B(k_0) = \{j \in J | k_j^d \subseteq R^B(k_0)\}$.

Avec ces notations, on définit un nouvel ensemble de contraintes Arrière qui est le suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{k' \in R^B(k_0)} B_{k'} - \sum_{j \in J^B(k_0)} S_j - Y_0 &= 0 \\ Y_{i-1} + \sum_{k' \in R^B(k_i)} B_{k'} - \sum_{j \in J^B(k_i)} S_j - Y_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

où $k_i \in K^e \setminus \{k^e\}$. En introduisant ces nouvelles contraintes dans le modèle de base, on obtient un nouveau modèle ayant une matrice de contraintes de densité plus réduite. Cette modification peut se généraliser au modèle de Bechtold et Jacobs étendue définie à la section 3.3.

3.4 Extension du modèle d’Aykin (1996)

Dans le chapitre 1, on a restreint le modèle d’Aykin au cas particulier d’une seule pause par quart. Dans la littérature, le modèle a été présenté dans un cadre plus général de plusieurs pauses par quart. Aykin (1996) a présenté son modèle dans le cas avec deux fenêtres de pause et une pause fixe au milieu pour chaque quart. Dans notre cas, le nombre de fenêtres de pause n’est pas fixé. Ainsi, les pauses fixes peuvent être au début, à la fin ou au milieu du quart. Avant de développer le modèle d’Aykin sous les hypothèses de flexibilité, nous présentons une revue de littérature des travaux qui ont été faits sur ce modèle.

3.4.1 Revue de littérature

Dans cette section, on survole les travaux basés sur le modèle d’Aykin pour la comparaison avec les autres modèles existants.

Aykin (1998) présente un algorithme de type séparation et évaluation progressive combiné à des plans coupants pour la résolution de son modèle. L’auteur a effectué des tests sur des exemples avec des horizons de plus de 24 heures et des périodes de planification de 15 minutes. Les types de quart débutent chaque 15 minutes, ce qui donne 96 types de quart avec une durée de 9 heures chacun, deux fenêtres de pause et une pause fixe au milieu. L’application de cet algorithme sur le modèle a montré

que, pour 78 % des tests, le temps CPU était de moins de 100 secondes avec un nombre de quarts qui varie entre 2160 et 16464. Dans un deuxième groupe de tests, le nombre de quarts varie entre 12000 et 32928 et l'algorithme a requis des temps CPU de moins 100 secondes ce qui montre que le temps n'augmente pas avec la taille des exemples.

Aykin (2000) présente une comparaison entre son modèle et celui de Bechtold et Jacobs (1990). Les tests utilisés sont les mêmes que ceux cités ci-dessus. L'auteur propose une relaxation des hypothèses du modèle de Bechtold et Jacobs, dans le cas où l'horizon dépasserait 24 heures en présence de deux fenêtres de pause avec pause fixe au milieu. Les résultats obtenus sur 220 tests ont révélé que le temps moyen de résolution était de 331.6 secondes à l'aide de la formulation de Bechtold et Jacobs et de 113.04 secondes à l'aide de la formulation d'Aykin. Cela montre une certaine rapidité de résolution avec le modèle d'Aykin. Par contre, l'auteur souligne que le modèle de Bechtold et Jacobs est plus compact.

3.4.2 Modèle d'Aykin étendu

Nous présentons une formulation mathématique plus générale du modèle d'Aykin (1996) sous les hypothèses considérées. La formulation d'Aykin est un cas particulier puisqu'elle fixe le nombre de fenêtres et le nombre de pauses à l'intérieur de chaque fenêtre, et elle n'exige pas un certain espacement entre les pauses de chaque fenêtre. Commençons par introduire les notations requises pour ce modèle :

- I : l'ensemble des périodes ;
- J : l'ensemble des types de quart ;
- K : l'ensemble des pauses ;
- S_j : le nombre d'employés affectés à un type de quart j ;
- X_{jk} : le nombre d'employés affectés à un type de quart j et qui prennent la pause k ;

- K_{jk} : l'ensemble des pauses de position p associées au type de quart j ;
- FP_{pjk} : l'ensemble des pauses en position $p + 1$ accessibles à partir de la pause k du type de quart j en position p . Une pause est accessible si l'espacement entre k et celle-ci respecte les durées minimale et maximale de l'activité.

Cette fenêtre contient toutes les pauses en position $(p + 1)$ qui respectent la durée minimale ou maximale de l'activité avec la pause considérée.

Considérons les contraintes d'espacement comme des contraintes de contrôle Arrière et Avant. Ces contraintes vont être définies pour chaque type de quart et pour chaque position de pause sauf la dernière position du type de quart donné. Dans ce cas, on ne va pas définir les contraintes par plage d'activité comme dans le cas de l'extension du modèle de Bechtold et Jacobs, mais par type de quart.

Selon la relation d'ordre défini pour les variables de type de quart et les pauses et pour un type de quart d'indice j , soit L_{pj}^s (resp. L_{pj}^e) l'ensemble des premières (resp. dernières) pauses en position $(p + 1)$ associées aux fenêtres de pause de toutes les pauses en position p . Alors, $L_{pj}^s = \bigcup_{k \in K_{(p+1)j}} \min(FP_{pjk})$, où $\min(FP_{pjk}) = \min\{k | k \in FP_{pjk}\}$, et $L_{pj}^e = \bigcup_{k \in K_{(p+1)j}} \max(FP_{pjk})$, où $\max(FP_{pjk}) = \max\{k | k \in FP_{pjk}\}$. Aussi, pour chaque pause $k \in L_{pj}^s$, on considère l'ensemble $N_{pj}^B(k)$ de toutes les pauses k' dont le temps de début est supérieur ou égal à celui de la pause k , i.e., $N_{pj}^B(k) = \{k' \in K_{(p+1)j} | k \leq k'\}$. Soit l'ensemble $R_{pj}^B(k)$ de toutes les pauses $k \in K_{pj}$, dont les pauses admissibles à la position $(p + 1)$ commencent après k , i.e., $R_{pj}^B(k) = \{k \in K_{pj} | FP_{pjk} \subseteq N_{pj}^B(k)\}$. On définit de façon similaire pour chaque pause $k \in K_{pj}^e$ l'ensemble $K_{pj}^F(k) = \{k' \in K_{(p+1)j} | k' \leq k\}$ des pauses qui commencent avant k et l'ensemble $J_{pj}^F(k) = \{k \in K_{pj} | FP_{pjk} \subseteq K_{pj}^F(k)\}$ pour tous les quarts, dont la fenêtre de pause finit avant ou avec la pause k . On note aussi par $l_{pj}^s = \min\{k | k \in L_{pj}^s\}$ et par $l_{pj}^e = \max\{k | k \in L_{pj}^e\}$.

À l'aide de ces notations, le modèle se formule comme suit :

$$\text{Minimiser } \sum_{j=1}^n c_j S_j \quad (3.19)$$

sujet à :

$$\sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j - \sum_{k \in K} \rho_{ik} \sum_{j \in J} X_{jk} \geq d_i \quad \forall i \in I \quad (3.20)$$

$$\sum_{k \in K_{pj}} X_{jk} - S_j = 0 \quad \forall p \in P, j \in J \quad (3.21)$$

$$\sum_{k' \in N_{pj}^F(k)} X_{jk'} - \sum_{k' \in R_{pj}^F(k)} X_{jk'} \geq 0 \quad \forall j \in J, p \in P^*, k \in L_{pj}^s \setminus \{l_{pj}^s\} \quad (3.22)$$

$$\sum_{k' \in K_{pj}^B(k)} X_{jk'} - \sum_{k' \in J_{pj}^B(k)} X_{jk'} \geq 0 \quad \forall j \in J, p \in P^*, k \in L_{pj}^e \setminus \{l_{pj}^e\} \quad (3.23)$$

$$S_j \geq 0 \quad \text{entier} \quad \forall j \in J \quad (3.24)$$

$$X_{jk} \geq 0 \quad \text{entier} \quad \forall k \in K, j \in J. \quad (3.25)$$

Les contraintes de couverture (3.20) assurent pour chaque période de l'horizon que le nombre d'employés qui travaillent durant cette période doit être au moins égal à la demande. Les contraintes de transport (3.21) assurent pour chaque position et pour chaque type de quart que le nombre d'employés affectés au type de quart est égal au nombre de ceux qui prennent leur pause dans la fenêtre de pause de la position considérée. Les contraintes d'espacement minimal (3.22) et maximal (3.23) garantissent que, pour un type de quart donné, la différence entre l'heure de début de la pause à la position $(p+1)$ et l'heure de fin de la pause à la position p doit être inférieure (resp. supérieure) à la durée maximale (resp. minimale) de l'activité.

3.5 Affectation des pauses aux quarts

La résolution du modèle de Betchold et Jacobs (1996) fournit le nombre d'employés par type de quart, ainsi que le nombre d'employés qui prennent leur pause par pause. Or, notre intérêt dans la construction des quarts de travail est d'obtenir le nombre d'employés par quart, ainsi que le nombre de ceux qui prennent des pauses à l'intérieur

des quarts car on a besoin d'affecter chaque employé à un quart de travail ainsi qu'aux pauses qui doivent être prises.

Pour obtenir cela, on va considérer un modèle de transport qui utilise la solution fournie par le modèle de Betchold et Jacobs. Soit les valeurs des variables \bar{S}_j et \bar{B}_k obtenues par une solution et considérons les variables X_{jk} définies ci-dessus. Notons par K_{pj} l'ensemble de toutes les pauses à la position p associées au quart de type j . Les équations du modèle sont les suivantes :

$$\sum_{j \in J} X_{jk} - \bar{B}_k = 0 \quad \forall k \in K \quad (3.26)$$

$$\sum_{k \in K_{pj}} X_{jk} - \bar{S}_j = 0 \quad \forall p \in P, j \in J \quad (3.27)$$

$$X_{jk} \geq 0 \quad \text{entier} \quad \forall j \in J, k \in K. \quad (3.28)$$

On remarque que le modèle utilisé est un modèle de transport réduit (sans contrainte de production), où la fonction objectif peut être considérée nulle. Les contraintes (3.26) assurent que le nombre d'employés qui prennent leur pause au début d'une période donnée (qui va correspondre à un début d'une pause k) soit égal au nombre d'employés de la pause k . Les contraintes (3.27) assurent pour chaque type de quart j et pour une position p que le nombre d'employés qui prennent leur pause à la période k soit égal au nombre d'employés affectés au type de quart.

3.6 Equivalence entre le modèle de Dantzig et le modèle de transport

Dans cette partie, nous allons montrer que le modèle de Dantzig (1954) est équivalent au modèle de transport pour le problème de base, i.e., en présence d'une seule pause

par quart. Cette preuve peut se généraliser au problème étendu. Quant à elle, l'équivalence entre le modèle d'Aykin et le modèle de transport est évidente. En effet, il suffit de remplacer dans les contraintes (1.1) les B_k par leurs expressions en fonction des X_{jk} .

Proposition 1 *Pour le problème de base, les relaxations linéaires des modèles de transport et de recouvrement sont équivalentes.*

Preuve : Notons par D_d le domaine du modèle de Dantzig et D_t le domaine du modèle de transport. Premièrement, nous allons montrer que $D_t \subseteq D_d$. Pour cela, considérons les contraintes du modèle de transport :

$$\sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j - \sum_{k \in K} \rho_{ik} B_k \geq d_i \quad \forall i \in I \quad (3.29)$$

$$\sum_{k \in K} X_{jk} - S_j = 0 \quad \forall j \in J \quad (3.30)$$

$$\sum_{j \in J} X_{jk} - B_k = 0 \quad \forall k \in K \quad (3.31)$$

$$S_j \geq 0 \text{ entier} \quad \forall j \in J \quad (3.32)$$

$$B_k \geq 0 \text{ entier} \quad \forall k \in K \quad (3.33)$$

$$X_{jk} \geq 0 \text{ entier} \quad \forall j \in J, k \in F(j). \quad (3.34)$$

Pour la contrainte $i \in I$ de l'ensemble des contraintes (3.29), on obtient l'inéquation suivante :

$$\sum_{j \in J_i} S_j - \sum_{k \in K_i} B_k \geq d_i \quad (3.35)$$

où J_i (resp. K_i) dénote l'ensemble des types de quart (resp. des pauses) qui couvrent la période i de l'horizon. En substituant les expressions (3.30) et (3.31) des variables S_j et B_k dans l'inéquation (3.35), on obtient une nouvelle inéquation s'écrivant :

$$\sum_{j \in J_i} \sum_{k \in K} X_{jk} - \sum_{k \in K_i} \sum_{j \in J} X_{jk} \geq d_i. \quad (3.36)$$

Maintenant en considérant les deux ensembles

$$A_i = \{(j, k) | j \in J_i; k \in F(j)\}$$

$$B_i = \{(j, k) | j \in J; k \in F(j) \cap K_i\},$$

on peut définir la constante indicatrice suivante :

$$a_{jk}^i = \begin{cases} 1 & \text{si } (j, k) \in A_i \text{ et } (j, k) \notin B_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À l'aide de ces constantes indicatrices et le fait que $B_i \subseteq A_i$, l'inéquation (3.36) se réduit à :

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} a_{jk}^i X_{jk} \geq d_i$$

Pour chaque variable X_{jk} , on peut associer une variable de quart d'indice l qu'on note X_l telle que $X_{jk} = X_l$. On remarque que le nombre de quarts obtenu est égal au nombre de variables X_{jk} (notons par L l'ensemble des indices des variables X_{jk}). À l'aide de ces nouvelles variables de quart X_l , on obtient une contrainte de couverture du modèle de Dantzig, qu'on peut généraliser pour tout $i \in I$

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} a_{jk}^i X_{jk} = \sum_{l \in L} b_{il} X_l \geq d_i \quad (3.37)$$

$$X_l \geq 0 \text{ entier} \quad (3.38)$$

où

$$b_{il} = \begin{cases} 1 & \text{si le quart } l \text{ couvre la période } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, toute solution du modèle de transport correspond à une solution du modèle de dantzig. Maintenant, montrons que $D_d \subseteq D_t$. Pour chaque quart X_l du modèle de Dantzig, on peut définir une nouvelle variable qu'on note X_{jk} telle que

$X_l = X_{jk}$. Cela se fait en regroupant tous les quarts qui ont la même heure de début et la même durée qu'on note j en un seul type de quart, et en regroupant toutes les pauses qui ont la même heure de début qu'on note k en une seule pause. Cette nouvelle variable X_{jk} représente le nombre d'employés affectés au quart de début j qui admet une pause de début k . Elle peut représenter aussi le nombre d'employés qui prennent la pause k dans les quarts de type j . Avec ces nouvelles variables X_{jk} , on peut définir les égalités suivantes :

$$\sum_{j \in J} X_{jk} = B_k \quad \forall k \in K \quad (3.39)$$

$$\sum_{k \in K} X_{jk} = S_j \quad \forall j \in J. \quad (3.40)$$

L'expression (3.39) signifie que le nombre d'employés affectés à tous les types de quarts et qui prennent une pause de début k , est égale au nombre d'employés qui prennent la pause k . L'expression (3.40) signifie que le nombre d'employés qui prennent une pause de début k et qui sont affectés aux quarts de même type j , est égal au nombre d'employés affectés aux quarts de type j . Ces deux expressions correspondent aux contraintes de transport. Finalement, pour obtenir la contrainte de couverture, pour une période i de l'horizon, on définit les deux équations suivantes :

$$\sum_{j \in J_i} \sum_{k \in K} X_{jk} = \sum_{j \in J_i} S_j \quad (3.41)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K_i} X_{jk} = \sum_{k \in K_i} B_k. \quad (3.42)$$

L'expression (3.41) nous donne le nombre d'employés affectés aux types de quart qui couvrent la période i . L'expression (3.42) nous donne le nombre d'employés qui prennent leur pause dans la période i . Donc, pour obtenir le nombre d'employés qui travaille pendant la période i , il suffit de prendre la différence entre ces deux expressions. De là, on obtient l'équation suivante

$$\sum_{l \in L_i} X_l = \sum_{j \in J_i} S_j - \sum_{k \in K_i} B_k. \quad (3.43)$$

À l'aide des constantes indicatrice définies ci-dessus, on obtient les inéquations suivantes :

$$\sum_{l \in L} b_{il} X_l = \sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j - \sum_{k \in K} \rho_{ik} B_k \geq d_i \quad \forall i \in I. \quad (3.44)$$

Ces dernières expressions correspondent aux contraintes de couverture du modèle de transport. Par conséquent, toute solution du modèle de Dantzig correspond à une solution du modèle de transport. Puisque $D_t \subseteq D_d$ et $D_d \subseteq D_t$, on obtient que $D_t = D_d$. Les deux modèles sont donc équivalents puisqu'ils ont le même objectif.

□

CHAPITRE 4 : EXPÉRIMENTATION

Afin de permettre la comparaison entre les différents modèles présentés dans le chapitre 3, et de mettre chacun des modèles en application, des tests ont été effectués à l'aide de données d'instances réelles provenant de l'entreprise Ad Opt. Nous avons aussi combiné ces scénarios pour permettre de faire des tests sur un nombre très élevé de variables. Des horizons d'un jour et de deux jours ont été considérés. Pour la méthode de résolution, nous avons utilisé le logiciel commercial CPLEX MIP version 7.5. Nous avons aussi appliqué une plus haute priorité sur les variables de type de quart pour chaque modèle. De plus, on donne une priorité de branchement à l'entier supérieur (BRANCH-UP) en premier car on a remarqué que le temps de résolution est très petit pour la plupart des instances par rapport au branchement global (BRANCH-GLOBAL). Les tests ont été effectués sur une station de travail Sun Ultra avec un processeur à 900 MHz.

4.1 Description des scénarios de données

Les tests ont porté sur trois scénarios, chacun des scénarios étant représenté par un ensemble de données décrivant cinq types d'informations : les types de quarts, les pauses, les profils de pause, les plages d'activité et la demande par période.

En analysant les différents scénarios, on remarque que le nombre de fenêtres de pause peut aller jusqu'à quatre fenêtres par type de quart. Par contre, on observe une différence dans le nombre de types de quart à générer et les détails sur les types de quart chevauchant deux jours. Le premier scénario peut générer 59 types de quart, avec un type de quart sans pause qui chevauche deux jours. Le deuxième scénario

peut générer 84 types de quart, avec un type de quart qui chevauche deux jours et qui contient deux fenêtres de pause dont chacune possède une pause seulement. Pour le troisième scénario, il peut générer 134 types de quart et contient un type de quart qui chevauche entre deux jours et possède deux fenêtres de pause où chacune admet plus d'une pause. Pour obtenir une application sur des données de grande taille, nous avons combiné les trois scénarios de différentes manières.

4.2 Plan des tests

Les tests consistent à faire des comparaisons entre les trois modèles définis dans le chapitre 3. Ces comparaisons sont basées sur la taille de chaque modèle et le temps de résolution de chaque test appliqué sur un scénario. La taille des problèmes est définie par le nombre de variables, le nombre de contraintes et la densité de la matrice des contraintes pour chacun des modèles et pour chaque scénario séparément.

Les tests ont été effectués sur différentes journées pour le même scénario pour le cas d'un horizon d'une journée. Pour le cas d'un horizon de deux jours, on n'a pas tenu compte du modèle de Dantzig car généralement lorsque la taille du modèle augmente, le modèle devient impraticable en terme de temps de résolution. On a comparé seulement les temps de résolution entre le modèle de Bechtold et Jacobs (1990), celui d'Aykin (1996) et le modèle de Bechtold et Jacobs réduit présenté à la section 3.3.1.

L'expérimentation se divise en deux parties : la première concerne les résultats pour un horizon d'une journée tandis que la deuxième partie porte sur les résultats pour un horizon de deux journées.

4.3 Résultats

4.3.1 Résultats pour des horizons d'une journée

Dans cette section et la section suivante, nous présentons plusieurs tableaux de résultats. Dans ces tableaux, les colonnes faisant référence aux modèles de Dantzig, de Bechtold et Jacobs, de Betchtold et Jacobs réduit et d'Aykin ont pour titre DA, BJ, BJR et AY, respectivement. Les différents scénarios sont notés par des indices 1, 2 et 3 et leurs combinaisons deux à deux sont notées par 1+2 et 2+3. À côté de chaque indice, on met l'indice du type d'activité associé au scénario entre parenthèses. Par exemple, le scénario 1+2 (2) correspond à la combinaison des scénarios 1 et 2 pour laquelle on utilise l'activité 2. On note aussi par NTQ le nombre de variables de type de quart généré par chaque scénario.

Le tableau 4.1 présente le nombre de variables, noté NV, et de contraintes, noté NC, pour chaque scénario et pour chaque modèle, ainsi que le nombre de types de quart générés pour chaque scénario. Dans le tableau 4.2, on présente le nombre d'éléments non nuls et la densité de la matrice des contraintes.

Les résultats sont présentés dans les tableaux 4.3 et 4.4 où la première colonne correspond au numéro du scénario, la deuxième correspond au nombre de types de quart, la troisième colonne la date de l'instance (jour/ mois) accompagné de l'indice de la courbe de demande utilisée entre parenthèses, la quatrième colonne à la valeur optimale de la relaxation linéaire et la cinquième colonne à la valeur de la solution optimale entière. Finalement, les trois dernières colonnes désignent le temps CPU (en secondes) pour les trois modèles. Aussi, il faut noter que les valeurs optimales Z_{LP} et Z_{IP} sont les mêmes pour chaque modèle. C'est pour cette raison qu'elles sont déclarées une seule fois.

La notation NR signifie que le modèle n'est pas réalisable, cela est dû au fait que lorsqu'un seul type de quart ne couvre pas une période (i.e. admet une pause) et qu'il y a une demande non nulle pour cette période, alors on ne peut pas couvrir cette demande. On remarque donc que les types de quarts proposés doivent être cohérents avec la courbe de demande.

Tableau 4.1 – Nombre de variables et de contraintes des trois modèles

Scénario	NTQ	NV				NC			
		AY	BJ	DA	BJR	AY	BJ	DA	BJR
1 (1)	134	1876	1098	4718	1777	2433	1969	85	1935
2 (2)	85	1485	888	4763	1230	1890	1342	65	1312
3 (3)	59	831	402	1940	664	1012	766	62	756
1+2(1)	150	2093	969	5575	1402	2563	2355	65	1412
1+2(2)	150	1980	768	3137	1158	2571	1957	62	1205
2+3(3)	192	2706	1366	6279	2243	3510	2514	85	2416

Tableau 4.2 – Nombre de non-zéros et densité des matrices pour les trois modèles

Scénario	Nombre de non-zéros				Densité (%)			
	AY	BJ	DA	BJR	AY	BJ	DA	BJR
1 (1)	23170	65391	120954	50380	1	3	30	1.4
2 (2)	19341	39993	122991	34217	1	3.3	39	2.1
3 (3)	9386	26266	51319	19800	1	8.5	43	3.9
1+2 (1)	22624	47697	144034	36937	1	2	40	1.8
1+2 (2)	24357	38380	82693	28714	0.4	2.5	40	2
2+3 (3)	33902	90105	162379	68347	0.3	2	30	1.2

En analysant les résultats obtenus sur le nombre de variables, le nombre de contraintes et la densité de la matrice des contraintes, on conclut qu'en terme de taille, le modèle de Betchtold et Jacobs est le plus compact des modèles. Par contre, pour la densité de la matrice, c'est le modèle d'Aykin qui possède la plus petite densité.

Tableau 4.3 – Résultats pour un horizon d’une journée

Scénario	NTQ	Date	Z_{LP}	Z_{IP}	temps CPU (s)		
					AY	BJ	DA
1 (1)	134	2/11(3)	27.5	28	13.5	34.8	3.5
		3/11(3)	27.5	28	40.0	37.2	3.1
		1/1(2)	17.89	19	23.2	87.0	18.9
		2/1(2)	21.5	22	14.5	29.1	3.2
		6/1(2)	19.82	21	15.2	44.5	5.2
		1/11(1)	26.19	27	21.1	61.6	4.5
		3/11(1)	29.50	30	31.9	124	17.6
		7/11(1)	29.5	30	11.6	31.1	4.1
2 (2)	84	2/11(3)	NR				
		3/11(3)	NR				
		1/1(2)	17	17	8.9	16.2	-
		2/1(2)	20.75	21	2.6	8.2	5.1
		6/1(2)	19.25	20	7.6	7.5	3.4
		1/11(1)	NR				
		3/11(1)	NR				
		7/11(1)	NR				
3 (3)	59	2/11(3)	26.5	27	3.6	3.9	3
		3/11(3)	26.75	27	3.6	3.9	1.1
		1/1(2)	17.75	19	1.6	3	11.7
		2/1(2)	21.5	22	7.5	5.4	1.1
		6/1(2)	19.75	20	2.9	2.0	2.8
		1/11(1)	26.5	27	3.3	4.6	1.1
		3/11(1)	29.75	30	3.3	5.1	1.1
		7/11(1)	28.57	29	4.8	5.6	1.2

Les expériences réalisées ont permis de constater que les trois modèles sont équivalents car ils fournissent les mêmes valeurs optimales que ce soit pour la relaxation linéaire ou pour le problème en nombres entiers. Au niveau des temps d’exécution, on remarque que le modèle de Dantzig met moins de temps pour résoudre la plupart des exemples. Le modèle d’Aykin par contre s’avère le deuxième plus performant en moyenne. Suivant les résultats obtenus, on conclut que pour des problèmes où le

Tableau 4.4 – Résultats pour un horizon d’une journée (suite du tableau 4.3)

Scénario	NTQ	Date	Z_{LP}	Z_{IP}	temps CPU (s)		
					AY	BJ	DA
1+2 (1)	150	2/11(3)	26.25	27	44.3	26.6	3.9
		3/11(3)	26.25	27	34.7	17.3	4.0
		1/1(2)	17.00	17	6.8	36.4	4.1
		2/1(2)	20.75	21	46.5	44.4	16.1
		6/1(2)	19.25	20	11.7	46.5	4.8
		1/11(1)	24.50	25	53.7	71	49
		3/11(1)	27.7586	28	*	45.6	5.7
		7/11(1)	28.0000	28	74.6	25.6	7
1+2 (2)	150	2/11(3)	26.5	27	16	10.9	2.3
		3/11(3)	26.75	27	15.8	5.8	2.3
		1/1(2)	17.50	18	9.7	12	3.6
		2/1(2)	21.25	22	16.7	13	2.4
		6/1(2)	19.50	20	13.9	24.6	5.9
		1/11(1)	26.50	27	9.9	5.2	3.7
		3/11(1)	29.75	30	13.3	26	7.6
		7/11(1)	28.50	29	12.3	4.4	2.8
2+3 (3)	192	2/11(3)	26.5	27	50.6	61.4	4.0
		3/11(3)	26.75	27	69.8	64	4.1
		1/1(2)	17.3429	18	46.3	108.3	5.6
		2/1(2)	21	21	19.1	24.4	4.2
		6/1(2)	19.3214	20	39.4	90.3	4.3
		1/11(1)	25.30	26	61.9	87.6	25.8
		3/11(1)	28.4211	29	140.5	76.7	19.9
		7/11(1)	28.50	29	32	80.6	4.8

nombre de quarts est inférieur à 6280 le modèle de Dantzig est préférable aux autres modèles.

4.3.2 Résultats pour des horizons de deux journées

Afin de comparer les trois modèles sur des problèmes de grande taille, nous avons augmenté l'horizon à deux jours et nous avons utilisé les mêmes scénarios précédents. Cette expérimentation nous permet aussi de connaître à partir de quelle longueur d'horizon (en nombre de jours) les modèles commencent à devenir lents en terme de temps d'exécution. Les résultats sont représentés dans le tableau 4.5 où on retrouve aussi les performances du modèle de Bechtold réduit.

Tableau 4.5 – Résultats pour un horizon de deux journées

Scénario	Date	Z_{LP}	Z_{IP}	temps CPU (s)			
				AY	BJR	BJ	DA
1 (1)	2-3/11(1)	56.25	57	11.4	645	31.4	2.9
	6-7/11(1)	58.32	59	8	28	-	9.3
	1-2/1 (2)	39.25	41	5	22	46.2	30.6
	5-6/1 (2)	37.5	39	5.3	42	38.2	5.2
	2-3/11(3)	53.25	54	15.7	81	41.2	24.2
	3-4/11(3)	53.50	54	119.2	47	62.4	17.2
2 (2)	1-2/1 (2)	37.75	39	-	254	-	-
	2-3/1 (2)	41.5	42	-	237	206	38.4
	6-7/1 (2)	36.25	38	-	139	-	-
3 (3)	3-4/11(3)	55	56	265	752	-	-
	1-2/1 (2)	39.39	41	67.2	371	493	-
	6-7/1 (2)	37.71	40	171	429	-	-
	3-4/11(1)	59.00	60	1164	619	-	102

La notation "-" signifie que le problème n'est pas arrivé à une solution entière en temps moins de 2 heures (temps limite). Dans les résultats du tableau 4.5, on constate que le modèle de Betchold et Jacobs réduit permet de résoudre tous les problèmes considérés avec un temps d'exécution minimal (resp. maximal) de 22 (resp. 752) secondes, alors que le modèle de Betchold et Jacobs ne réussit pas à résoudre certains problèmes.

Pour le modèle d'Aykin, on remarque qu'il ne permet pas de résoudre les problèmes du scénario 2 dans le temps limite. Pour les problèmes résolus, le temps d'exécution minimal (resp. maximal) est de 5 (resp. 1164) secondes. Pour le modèle de Dantzig, les temps de résolution varient entre 2.9 et 102 secondes. Par contre, un certain nombre d'instances n'ont pas été résolues. Si notre intérêt se porte sur l'efficacité de résolution, le modèle de Betchold et Jacobs réduit semble préférable aux deux trois autres modèles.

CHAPITRE 5 : MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TEMPORELLE

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de résolution du problème de construction des quarts de travail pour le cas d'un horizon de travail d'une semaine. Nous débutons par la présentation de la technique de décomposition temporelle pour résoudre le PCQT lorsque la taille du modèle devient très grande. Ensuite, nous abordant la résolution du problème restreint à une tranche de temps avec l'ajout d'un ordre de priorité pour sélectionner les variables sur lesquelles portent les décisions de branchement dans la méthode de séparation et évaluation progressive (Branch-and-Bound). Finalement, nous proposons une approche de réoptimisation lorsque la demande change pour un jour de la semaine. Nous montrons comment obtenir la solution pour le jour où il y a modification de la demande, tout en gardant la solution planifiée pour les autres jours.

5.1 Décomposition temporelle

Sur une semaine, le problème de PCQT devient très grand et le temps de résolution devient très long. Pour réduire le temps de résolution dans ce cas, on propose une technique de décomposition temporelle. Cette technique consiste à décomposer le problème en plusieurs sous-problèmes qui sont résolus séparément. Il suffit pour cela de décomposer l'horizon d'optimisation en plusieurs tranches de temps consécutives, de même longueur et se chevauchant. Ensuite, on résout le problème dans chaque tranche de temps en tenant compte des chevauchements entre les tranches de temps successives.

La décomposition se fait de la manière suivante : notons la longueur de l'horizon par H et la longueur d'une tranche de temps par T . Supposons que le nombre de fenêtres d'optimisation pour cet horizon est égal à k . Alors, on obtient les fenêtres $[L_i, F_i]$ pour $i = 1, \dots, k$, où les L_i (resp. F_i) correspondent aux débuts (resp. fins) des tranches de temps :

$$L_i = H + (i - 1) * T \quad (5.1)$$

$$F_i = L_i + T. \quad (5.2)$$

Au départ, nous avons l'ensemble des variables de type de quart et l'ensemble des variables de pause qui couvrent tout l'horizon. Pour résoudre le problème, on se place dans la première tranche d'optimisation et on construit le modèle avec les variables de quart et de pause qui couvrent cette tranche de temps considérée. Ensuite, on résout le modèle avec cet ensemble de variables restreint et on obtient une partie de la solution du problème global. On répète le processus pour chaque tranche de temps. À la fin, les solutions obtenues dans chaque intervalle sont concaténées pour donner une solution globale du problème.

Dans cette technique, on remarque que lorsqu'on considère un intervalle $[L_i, F_i]$, il arrive qu'un ensemble de variables de type de quart ont une heure de début (resp. fin) inférieure (resp. supérieure) à L_i (resp. F_i). Pour le début L_i , on cherche le minimum, qu'on note Min_i , des débuts de quart qui chevauchent du côté de L_i . Ensuite, on devance le début de la tranche de temps jusqu'à Min_i . Pour la fin F_i , on cherche le maximum (noté par Max_i) des heures de fin de quart qui chevauchent du côté de F_i . Ensuite, on augmente la tranche de temps pour inclure toutes les variables de quart qui ont une fin inférieure au Max_i . Finalement, on obtient un nouvel intervalle de longueur $[Min_i, Max_i]$.

La construction du modèle dans cette tranche de temps se fait de la manière suivante : premièrement, la demande doit être changée dans les périodes de temps $[Min_i, L_i]$

en tenant compte des solutions obtenues dans la tranche de temps précédente. Pour chaque période de $[F_i, Max_i]$, on garde la même demande initiale. Le changement de la demande dans les périodes $[Min_i, L_i]$ se fait de la manière suivante : dans la solution obtenue à la tranche précédente, on considère les quarts qui ont un début avant Min_i et une fin après Min_i . L'ensemble de ces quarts est noté E . Pour chaque période, on fait la différence entre la demande et la somme de tous les quarts parmi l'ensemble E qui couvrent cette période et qui n'admettent pas une pause dans cette période. Donc, la demande restante devra être couverte par les quarts de la tranche de temps courante.

Il est à noter que la première tranche de temps est définie sur l'intervalle $[0, Max_1]$ et que la dernière tranche de temps est définie sur les deux intervalles $[Min_k, H]$ et $[0, Max_k - H]$ afin d'obtenir une solution cyclique.

5.2 Méthode de résolution dans une tranche de temps

La résolution du modèle pour une tranche de temps donnée se fait comme la résolution d'un modèle linéaire en nombres entiers en utilisant le logiciel commercial Cplex MIP, avec ajout d'un ordre de priorité dans la méthode de séparation et évaluation progressive utilisée par Cplex. Cette priorité donne une haute priorité pour les variables de type de quart, puisque ces variables interviennent dans la fonction objectif, leur nombre est inférieur au nombre de variables de pause les contraintes d'égalité définissent une relation entre les variables de type de quart et les variables de pause. De plus, on donne une priorité de branchement à l'entier supérieur (BRANCH-UP) en premier car on a remarqué que le temps de résolution est très petit pour la plupart des instances par rapport au branchement global (BRANCH-GLOBAL). Finalement

on ajoute aussi comme contrainte, une borne inférieure sur la fonction objectif. Cette borne est définie dans la proposition suivante.

Proposition 2 *Une borne inférieure sur le nombre d'employés affectés à tous les types de quart est donnée par*

$$C = \frac{\sum_{i \in I} d_i}{S_{max}} \quad (5.3)$$

où

$$S_{max} = \max_{j \in J} \{T_j - P_j\};$$

T_j : le nombre de périodes couvertes par le type de quart j ;

P_j : le nombre de périodes d'une pause du type de quart j .

Preuve :

Soit la contrainte de couverture (3.20) :

$$\sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j - \sum_{k \in K} \rho_{ik} \sum_{j \in J} X_{jk} \geq d_i \quad \forall i \in I \quad (5.4)$$

En faisant la somme sur toutes les périodes, on obtient l'inégalité suivante :

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \rho_{ik} \sum_{j \in J} X_{jk} \geq \sum_{i \in I} d_i \quad (5.5)$$

Or, $\sum_{i \in I} \delta_{ij} S_j$ est égal au nombre de périodes couvertes par le type de quart j , $\sum_{i \in I} \rho_{ik} X_{jk}$ est égal au nombre de périodes de la pause k du quart de type j et $\sum_{k \in K} X_{jk} = S_j$.

Donc, l'inéquation (5.5) peut s'écrire :

$$\sum_{j \in J} T_j S_j - \sum_{j \in J} P_j S_j \geq \sum_{i \in I} d_i \quad (5.6)$$

$$S_{max} \sum_{j \in J} S_j \geq \sum_{i \in I} d_i \quad (5.7)$$

Finalement, on obtient l'inégalité suivante :

$$\sum_{j \in J} S_j \geq \frac{\sum_{i \in I} d_i}{S_{max}}.$$

□

On a remarqué qu'en appliquant la résolution par tranche de temps, il arrive que sur une tranche de temps donnée, le problème ne se résolve pas dans un temps limite de moins de deux heures. Par contre, on trouve généralement un gap d'optimalité absolu inférieur ou égal à 1 entre la meilleure borne inférieure et la meilleure solution entière trouvée. Par conséquent, dans ces situations, on accepte toute solution présentant un gap inférieur ou égale à 1, pour obtenir une solution globale pour tous les scénarios.

5.3 Modification de la demande dans une journée

En général, lorsqu'on fait la construction des quarts de travail pour une semaine, la solution obtenue est reproduite telle quelle pour les autres semaines de la saison. Toutefois, il arrive souvent des imprévus qui peuvent changer la demande d'une journée pour une certaine semaine de la saison. Donc, il faut modifier la solution déjà obtenue pour cette semaine précise. Une manière rapide de refaire la construction des quarts est de garder la solution planifiée et de réoptimiser le modèle juste à l'intérieur de la tranche où il y a eu un changement de la demande.

Il y a deux façons de faire. La première façon consiste à réoptimiser le problème sur la tranche considérée sans changer la solution obtenue pour les quarts qui chevauchent le début ou la fin de la tranche. La deuxième façon consiste à élargir la tranche de temps pour inclure les quarts qui chevauchent le début ou la fin de la tranche. Dans ce cas, on va modifier la solution avant et après la tranche considérée. Dans cette partie, nous allons étudier le premier cas seulement, i.e., nous ne faisons pas de changement de la solution avant et après la tranche d'optimisation.

Soit $[D, F]$ l'intervalle où il y a eu modification de la demande avec D le début (resp. F la fin) de l'intervalle. Pour la construction du modèle, on considère la solution planifiée obtenue avant le changement de la demande comme conditions initiales

pour la résolution du modèle et on utilise toutes les variables des types de quart qui ont un début et une fin à l'intérieur de l'intervalle $[D, F]$. On regarde aussi les types de quart qui ont une heure de début inférieure à D et une heure de fin supérieure à D ainsi que les types de quart qui ont une heure de début inférieure à F et une heure de fin supérieure à F . Ces types de quart vont être inclus dans le modèle.

5.4 Expérimentation

Dans cette partie, nous présentons les résultats de l'application de la méthode de décomposition temporelle aux différents scénarios. Dans les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3, on présente les résultats obtenus avec le modèle de Bechtold et Jacobs réduit pour chaque scénario avec différentes activités. Les résultats pour le modèle d'Aykin sont présentés dans les tableaux 5.4, 5.5 et 5.6. Les résultats portent sur le temps de résolution ainsi que la valeur de la fonction objectif dans le cas de la résolution par la méthode de décomposition temporelle et celle par la méthode directe (sans décomposition). Pour la méthode de décomposition temporelle, on utilise des longueurs de tranche d'une, deux et de trois journées pour les instances du scénario 1. La notation "*" signifie qu'on a utilisé une condition d'arrêt pour la résolution lorsque le gap absolue est inférieur ou égal à 1.

La notation employée dans les tableaux est la suivante. Les termes F1, F2 et F3 correspondent à des résolutions par tranche de temps d'une journée, de deux journées et de trois journées, respectivement. F7 indique une résolution directe du problème sur sept jours. Pour un scénario, les colonnes F1, F2 et F3 comprennent sept, quatre et trois valeurs de Z_{IP} , respectivement, soit une par tranche de temps. La valeur optimale pour le problème en entier est alors indiqué dans la rangée Totaux. Il est à noter que ces totaux ne sont pas égaux aux sommes des valeurs Z_{IP} pour chaque tranche puisque certains types de quart chevauchent deux tranches de temps.

Avec la résolution directe, on a réussi à traiter qu'une seule instance par le modèle de Bechtold et Jacobs réduit soit le scenario 1(1) (voir tableau 5.1) et qu'une seule instance par le modèle d'Aykin (voir tableau 5.4). Pour le même scénario et pour le reste des instances on donne la valeur de la relaxation linéaire seulement.

Tableau 5.1 – Résultats du modèle de Bechtold et Jacobs réduit par décomposition temporelle pour le scénario 1

Scénario	Date	Z_{IP}				Temps CPU (s)			
		F1	F2	F3	F7	CPU1	CPU2	CPU3	CPU7
1(1)	2-8/11	27				5.1			
		32	57			4.3	46.9		
		32		87		6.1		167.2	
		32	62			4.9	54.4		
		32				3.9			
		31	61	91		4.6	54.7	145.1	
		29	29	29	203	5	4.6	5.2	3790
Totaux		203	203	203	203	33.9	160.6	317.5	3790
1(2)	1-7/1	19				4.1			
		23	41			5.9	40.4		
		23		63		6.7		131	
		23	45			2.3	17.6		
		23				7			
		21	43	65		5	42.4	214.3	
		20	20	20		182.9	151	262.4	
Totaux		146	146	146	141.25	213.9	251.4	607.7	-
1(3)	1-7/11	27				5			
		29	54			4.6	42.4		
		29		81		4.4		98.7	
		29	56			4.5	36.3		
		29				4.2			
		29	56	83		4.7	41.7	118.1	
		29	29	29		5	4.7	5.2	
Totaux		189	189	189	185.5	32.4	125.1	222	-

Tableau 5.2 – Résultats du modèle de Bechtold et Jacobs réduit par décomposition temporelle pour le scénario 2

Scenario	Date	Z_{IP}		Temps CPU (s)	
		F1	F2	CPU1	CPU2
2(2)	1-7/1	20		104	
		26	41	7.4	117.6
		24		24.5	
		24	45	6.2	395.3
		24		11.6	
		23	44	13.4	153.9
		19	20	14.4	14.3
Totaux		142	140*	181.5	681.1

On remarque dans ces tableaux, que la résolution par décomposition temporelle donne dans la plupart des cas une valeur de la fonction objectif pareille pour les différentes tranches et à celle donnée par la méthode directe lorsqu'on l'obtient. On remarque aussi que pour certains exemples comme dans les scénarios 2 et 3, on n'a pas pu appliquer la décomposition avec des tranches de trois jours et pour la résolution directe pour un horizon de sept jours. Cela est dû au fait que ces exemples sont de très grande taille.

En comparant les résultats obtenus avec le modèle de Bechtold et Jacobs réduit et ceux obtenus avec le modèle d'Aykin, on trouve qu'ils sont identiques au niveau de la qualité des solutions (Z_{IP}) sauf pour deux scénarios, le scenario 2(2), avec des tranches d'une journée pour lequel le modèle d'Aykin a permis d'obtenir une meilleure solution (140 employés au lieu de 142) et pour le scenario 3(2), avec des tranches de deux jours pour lequel le modèle de Bechtold et Jacobs réduit a permis d'obtenir une meilleure solution (147 employés au lieu de 148). De plus, on constate que, la plupart du temps, le modèle d'Aykin permet d'obtenir des temps de résolution nettement inférieurs à ceux générés par le modèle de Bechtold et Jacobs réduit. La

Tableau 5.3 – Résultats du modèle de Bechtold et Jacobs réduit par décomposition temporelle pour le scénario 3

Scénario	Date	Z_{IP}		Temps CPU (s)	
		F1	F2	CPU1	CPU2
3(2)	1-7/1	20		39.1	
		25	42	10.2	289.3
		25		22.5	
		25	47	82	228.5
		26		22.1	
		24	46	82.8	548.5
		21	21	40.8	70.6
Totaux		148	147	299.5	1136.9
3(3)	2-8/11	28		32.3	
		31	56	64.8	779.4
		31		31.7	
		31	59	46.9	478.2
		31		44.3	
		31	59	36.9	739.7
		31	31	33.8	67.5
Totaux		196	196*	290.7	2064.8

Tableau 5.4 – Résultats du modèle d'Aykin par décomposition temporelle pour le scénario 1

Scénario	Date	Z _{IP}				Temps CPU (s)			
		F1	F2	F3	F7	CPU1	CPU2	CPU3	CPU7
1(1)	2-8/11	27				5.9			
		32	57			3.8	7.5		
		32		87		3.8		45.5	
		32	62			3.9	9.0		
		32				3.8			
		31	61	91		40.7	28.7	81.4	
		29	29	29		5.5	5.4	5.5	
Totaux		203	203	203	203*	67.4	45.6	132.4	244.8
1(2)	1-7/1	19				2.9			
		23	41			3.2	16.6		
		23		63		3.1		33.8	
		23	45			3.1	9.4		
		23				3.1			
		21	43	65		3.2	13.4	11.9	
		20	20	20		2.4	2.3	2.5	-
Totaux		146	146	146	141.25	21	41.7	48.2	
1(3)	1-7/11	27				3.7			
		29	54			3.0	37.8		
		29		81		3.0		64	
		29	56			3.0	14.4		
		29				3.0			
		29	56	83		3.0	14.5	58	
		29	29	29		3.0	3.8	4.3	
Totaux		189	189*	189*	185.5	21.7	70.5	126.3	-

Tableau 5.5 – Résultats du modèle d’Aykin par décomposition temporelle pour le scénario 2

Scénario	Date	Z_{IP}		Temps CPU (s)	
		F1	F2	CPU1	CPU2
2(2)	1-7/1	20		13	
		24	41	12	51
		24		13	
		24	45	13	67
		24		13	
		23	44	12	24
		19	19	12	12
Totaux		140	140*	88	154

Tableau 5.6 – Résultats du modèle d’Aykin par décomposition temporelle pour le scénario 3

Scénario	Date	Z_{IP}		Temps CPU (s)	
		F1	F2	CPU1	CPU2
3(2)	1-7/1	20		25.6	
		25	42	15.2	61
		25		12.5	
		26	48	33.8	35.4
		25		15.5	
		24	46	16.1	95.6
		21	21	24.7	22.9
Totaux		148	148	143.4	194.9
3(3)	2-8/11	28		16.4	
		31	56	15.5	73.7
		31		63.9	
		31	59	15.5	298
		31		63.8	
		31	59	22.9	69.6
		31	31	14.3	13.6
Totaux		196	196*	212.3	454.9

moyenne des temps de calcul pour l'ensemble des tests pour les deux modèles est donnée dans le tableau 5.7.

Tableau 5.7 – Résultats des moyennes des temps CPU pour les deux modèles

Modèle	CPU1	CPU2	CPU3
BJR	175	736	382
AY	92	160	102

CONCLUSION

Ce projet de maîtrise a porté sur le problème de construction des quarts de travail dans le cas où il y a une grande flexibilité dans les pauses. Trois modèles qui traitent ce problème ont été décrits ainsi que leurs extensions sous les hypothèses de flexibilité. Nous avons aussi proposé une modification du modèle de Betchold et Jacobs (1990) qui permet de réduire la densité de la matrice des coefficients définissant les contraintes. La comparaison des quatre modèles s'est faite sur des jeux de données fournis par la compagnie Technologies Ad Opt Inc. Ces données correspondent à des instances réelles.

Le problème de construction de quarts de travail sur un horizon d'une journée a été traité sur différents scénarios avec un nombre de quarts maximum de 6279. Les résultats obtenus montrent que le modèle de Dantzig (1954) possède un temps de résolution très petit par rapport aux autres modèles. Le modèle d'Aykin (1996) s'est classé le deuxième. Le modèle de Dantzig a été plus performant car la taille des tests utilisés était relativement petite.

Pour augmenter la taille des modèles, des tests sur un horizon de deux jours ont été effectués. Les résultats obtenus ont montré que le modèle d'Aykin et le modèle de Betchold et Jacobs réduit se résolvent rapidement par rapport aux deux autres modèles. Par contre, pour quelques scénarios, le modèle d'Aykin n'a pas pu résoudre certaines instances.

Pour terminer, nous avons proposé une stratégie de décomposition temporelle pour accélérer le temps de résolution sur des horizons d'une semaine. Cette stratégie a été appliquée au modèle d'Aykin et au modèle de Betchold et Jacobs réduit. Les

résultats ont montré que le modèle d'Aykin donne pour la plupart des tests un temps de résolution meilleur que celui obtenu par le modèle de Bechtold et Jacobs réduit.

Pour des travaux de recherche futurs, nous proposons une étude comparative avec des instances de taille plus grande, sur un horizon d'une journée. Pour les instances qui ne peuvent pas être résolues, il serait intéressant de rechercher des bornes sur les variables en vue de réduire le domaine d'optimisation. Par ailleurs, il serait aussi possible de réduire la densité de la matrice des contraintes d'espacement.

BIBLIOGRAPHIE

AYKIN, T. (1996). Optimal shift scheduling with multiple break window. *Management Science* **42**(4), 591–602.

AYKIN, T. (1998). A composite branch and cut algorithm for optimal shift scheduling with multiple breaks and break windows. *Journal of the Operational Research Society* **49**, 603–615.

AYKIN, T. (2000). A comparative evaluation of modeling approaches to the labor shift scheduling problem. *European Journal of Operational Research* **125**, 381–397.

BARD J.F., BINICI, C. et DESILVA, A.H. (2003). Staff scheduling at the United States Postal Service. *Computers & Operations Research* **30**, 745–771.

BECHTOLD, S.E. et JACOBS, L.W. (1990). Implicit modeling of flexible break assignments in optimal shift scheduling. *Management Science* **36**(11), 1339–1351.

BECHTOLD, S.E. et JACOBS, L.W. (1996). The equivalence of general set-covering and implicit integer programming formulations for shift scheduling. *Naval Research Logistics* **34**, 223–249.

BURNS, R.N. et CARTER, M.W. (1985). Workforce size and single shift schedules with variable demands. *Management Science* **31**(5), 599–607.

CEZIK, T. et GUNLUK, P. (2004). Reformulating linear programs with transportation constraints - with applications to workforce scheduling. *Naval Research Logistics* **51**(2), 258–274.

DANTZIG, G. (1954). A comment on Edie's traffic delay at toll booths. *Operations Research* **2**(3), 339-341.

PANTON, D.M. et RYAN, D.M (1999). Column generation models for optimal workforce allocation with multiple breaks. Proceedings of the 4th International Congress on Industrial & Applied Mathematics, Edinburgh, UK.

REKIK, M., CORDEAU, J.F et SOUMIS, F. (2002). An integrated model for day-off and shift scheduling. Cahiers du GERAD G-2002-32, École Polytechnique de Montréal, Canada.

TOPALOGLU, S. et OZKARAHAN, I. (2002). Implicit optimal tour scheduling with flexible break assignments. *Computer & Industrial Engineering* **44**, 75–89.